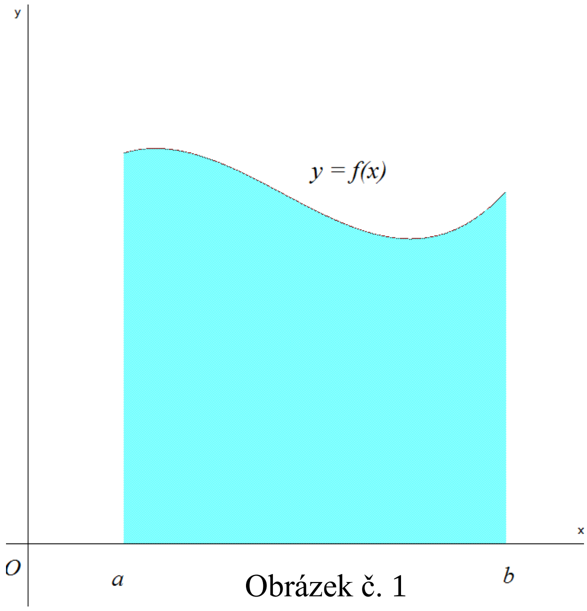
PaedDr. Naděžda Kubešová
VY_32_INOVACE_XII.59

Obsah rovinného útvaru

Každému rovinnému obrazci (pojem obrazce chápeme jako omezený rovinný geometrický útvar a rovinný geometrický útvar je chápán jako podmnožina roviny) lze přiřadit jediné kladné reálné číslo S, které nazveme obsah obrazce. Toto číslo má následující vlastnosti:

1. Obsahy shodných obrazců jsou si rovny
2. Jsou – li S_1, S_2 obsahy dvou obrazců, které se nepřekrývají, pak $S_1 + S_2$ je obsah obrazce, který je sjednocením obou obrazců (průnikem nesmí být rovinný obrazec).
3. Obsah obdélníka o rozměrech a, b je roven součinu ab.
4. Mají – li obrazce $\mathbf{O_1}$ a $\mathbf{O_2}$ po řadě obsahy S_1 a S_2, a je – li obrazec $\mathbf{O_1}$ částí obrazce $\mathbf{O_2}$, pak platí $S_1 \leq S_2$.

Vrátíme se k zavedení určitého integrálu, které bylo popsáno v první kapitole.



Obrázek č. 1

Uvažujme funkci $y = f(x)$, která je na intervalu $\langle a, b\rangle$ spojitá a nezáporná. Její graf v uvedeném intervalu, osa x a přímky $x = a$ a $x = b$ tvoří rovinný útvar, který si označíme U (můžeme jej specifikovat zápisem U(a, b, f)) a je zakreslen na obrázku č. 1.

Zavedení určitého integrálu bylo provedeno s požadavkem stanovení obsahu uvedeného útvaru. Proto uvedeme rovnou větu, pomocí které budeme počítat obsah útvaru U, který je specifikovaný na obrázku č. 1.

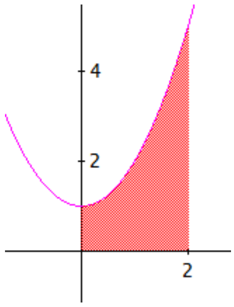
Věta

Nechť je funkce $y = f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$ spojitá a je na něm nezáporná. Pak pro obsah obrazce U(a, b, f) platí $S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

PaedDr. Naděžda Kubešová

Příklad

1. Určete obsah obrazce ohraničeného funkcí $y = x^2 + 1$, osou x a přímkami $x = 0$ a $x = 2$.

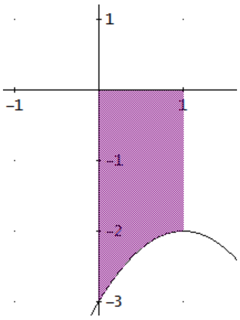


Jedná se o klasické zadání, řešení je jednoduché:

$$S = \int_0^2 (x^2 + 1)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_0^2 = \frac{14}{3}$$

Hledaný obsah je $\frac{14}{3}\ j^2$.

2. Určete obsah obrazce ohraničeného funkcí $y = -x^2 + 2x - 3$, osou x a přímkami $x = 0$ a $x = 1$.

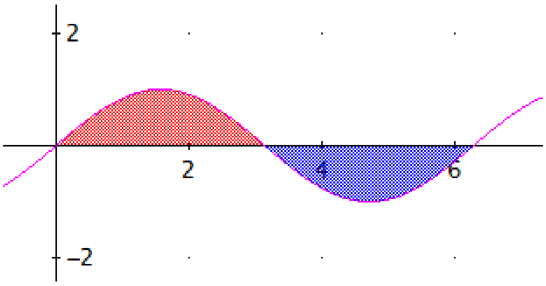


Celý obrazec leží pod osou x. Výsledek určitého integrálu je záporné reálné číslo. V takovém případě dáme před integrál znaménko minus.

$$S = -\int_0^1 (-x^2 + 2x - 3)\,\mathrm{d}x = -\left[\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x\right]_0^1 = \frac{7}{3}.$$

Obsah obrazce je $\frac{7}{3}\ j^2$.

3. Určete obsah obrazce omezeného funkcí $y = \sin x$, osou x a přímkami $x = 0$ a $x = 2\pi$.



Z obrázku je patrné, že obrazec je sjednocením dvou elementárních obrazců. Jeden leží celý nad osou x a druhý pod ní. Obsah určíme pomocí dvou určitých integrálů, které budou vyjadřovat obsahy elementárních obrazců. Určitý integrál vyjadřující obsah obrazce pod osou x započítáme se znaménkem minus.

$$S = \int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = [-\cos x]_0^{\pi} - [-\cos x]_{\pi}^{2\pi} = -(-1-1) - (-1-1) = 4$$

Výsledný obsah je $4\ j^2$.

Poznámka:

Protože oba elementární obrazce mají stejný obsah, můžeme výpočet provést následujícím způsobem: $S = 2\int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = 2[-\cos x]_0^{\pi} = 4$.

PaedDr. Naděžda Kubešová
VY_32_INOVACE_XII.59

Úloha:

Určete obsah obrazce ohraničeného funkcí $y = \frac{1}{x}$, osou x a přímkami $x = 1$ a $x = 2$.

$[\ln 2\ j^2]$