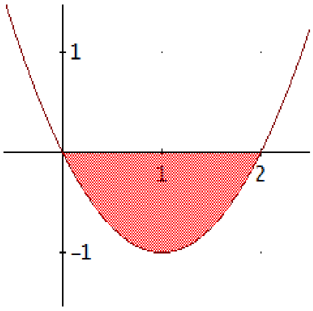
PaedDr. Naděžda Kubešová
VY_32_INOVACE_XII.60

Obsah rovinného útvaru – rozklad na elementární obrazce

Příklad

1. Určete obsah obrazce ohraničeného funkcí f: $y = x^2 - 2x$ a osou x.

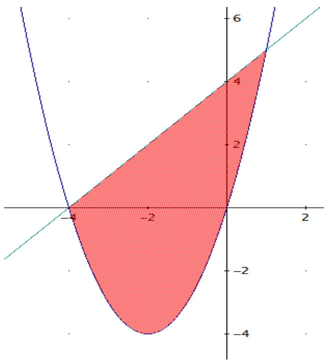


Obrazec je vymezen grafem funkce a osou x. Meze pro určirý integrál jsou x – ové souřadnice průsečíků funkce f s osou x. Celý obrazec leží pod osou x, proto přidáme znaménko minus.

$$S = -\int_0^2 (x^2 - 2x)\mathrm{d}x = -\left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

Hledaný obsah je $\frac{4}{3}\, j^2$.

2. Určete obsah obrazce ohraničeného funkcemi f: $y = x^2 + 4x$ a g: $y = x + 4$.

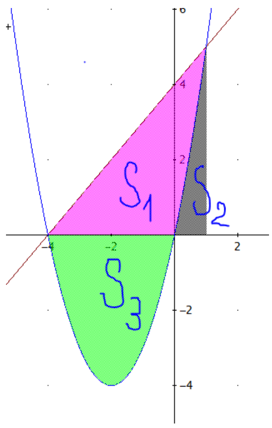


Na obrázku je vyznačen obrazec, který určují obě zadané funkce. Pro stanovení mezí určíme opět x – ové souřadnice průsečíků funkcí f a g. Řešíme rovnici :

$x^2 + 4x = x + 4$

$x_1 = -4$, $x_2 = 1$.

Rozdělíme obrazec na části, jejichž obsah určíme pomocí určitého integrálu.



Obsah obrazce, který je vymezený funkcí g, osou x a přímkou $x = 1$ ($S_1 + S_2$), je roven $\int_{-4}^{1}(x+3)\mathrm{d}x$. Obsah S_3 obrazce, který je utvořen částí funkce f ležící pod osou x a osou x, je roven $-\int_{-4}^{0}(x^2+4x)\mathrm{d}x$. Konečně obsah S_2 určíme pomocí určitého integrálu $\int_0^1 (x^2+4x)\mathrm{d}x$. Ten ovšem budeme muset odečíst. Pro obsah vymezeného obrazce platí :

$$S = \int_{-4}^{1}(x+3)\mathrm{d}x - \int_{-4}^{0}(x^2+4x)\mathrm{d}x - \int_0^1 (x^2+4x)\mathrm{d}x = \int_{-4}^{1}(x+3)\mathrm{d}x - \int_{-4}^{1}(x^2+4x)\mathrm{d}x = \frac{125}{6}$$

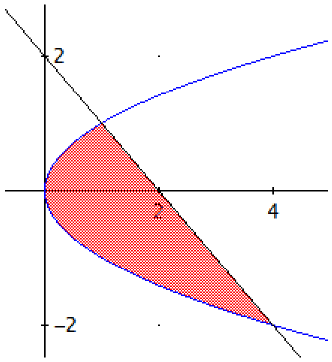
.

Obsah obrazce je $\frac{125}{6}\, j^2$.

PaedDr. Naděžda Kubešová

V předcházející úloze je vyřešen další případ z typových vymezení rovinového obrazce. Ten je určen funkcemi $y = f(x)$, $y = g(x)$ a mezemi $x = a$ a $x = b$. Pro libovolné x z intervalu $\langle a, b \rangle$ platí $f(x) \geq g(x)$. Potom pro výpočet obsahu takového obrazce použijeme vztah $S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$. V takovém případě nezáleží na poloze vzhledem k ose x. Vždy můžeme obě funkce posunout o stejnou konstantu tak, aby jejich funkční hodnoty v intervalu $\langle a, b \rangle$ byly nezáporné. Při výpočtu se konstanta odečte.

3. Určete obsah obrazce ohraničeného funkcí f: $y = 2 - x$ a křivkou $y^2 = x$.



K řešení úlohy použijeme předcházející úvahu. Nejprve určíme x – ové souřadnice průsečíků funkce a křivky:

$(2 - x)^2 = x$

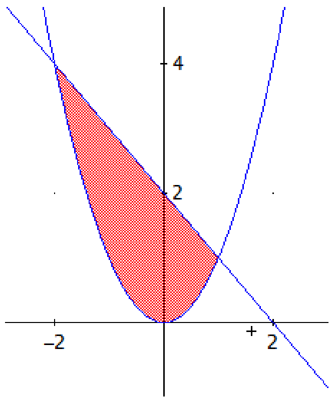
$x^2 - 5x + 4 = 0$

$$x_1 = 1, x_2 = 4.$$

Křivka $y^2 = x$ je sjednocením dvou funkcí: $y = \sqrt{x}, y = -\sqrt{x}$.

Funkce, která ohraničuje obrazec shora, se skládá ze dvou částí. Pro $x \in \langle 0,\ 1 \rangle$ je předpis $y = \sqrt{x}$ a pro $x \in \langle 1,\ 4 \rangle$ $y = 2 - x$. Příslušné integrály pro výpočet plochy z těchto funkcí budeme započítávat s kladným znaménkem. Zdola je obrazec omezen funkcí $y = -\sqrt{x}$. Integrál z ní budeme odečítat.

$$S = \int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x + \int_1^4 (2 - x)\mathrm{d}x - \int_0^4 (-\sqrt{x})\mathrm{d}x = \frac{2}{3} - \frac{3}{2} + \frac{16}{3} = \frac{9}{2}.$$



Poznámka: Zadanou úlohu můžeme řešit ještě jiným způsobem. Útvar zobrazíme v osové souměrnosti podle osy I. a III. kvadrantu. Obrazec potom vymezují funkce $y = 2 - x$ a $y = x^2$ (průsečíky $x_1 = -2, x_2 = 1$). Obsah vypočítáme podstatně jednodušeji:

$$S = \int_{-2}^{1} (2 - x - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{9}{2}.$$

Obsah obrazce je $\frac{9}{2}\ j^2$.

PaedDr. Naděžda Kubešová
VY_32_INOVACE_XII.60

Úloha:

1. Určete obsah obrazce ohraničeného funkcí $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{8}{x}$ a přímkou $x = 16$.

$\left[\frac{112}{3} - 8\ln 4\ j^2\right]$.

2. Určete obsah obrazce ohraničeného funkcí $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{4}$ a přímkou $y = 4$.

$\left[\frac{32}{3}\ j^2\right]$.