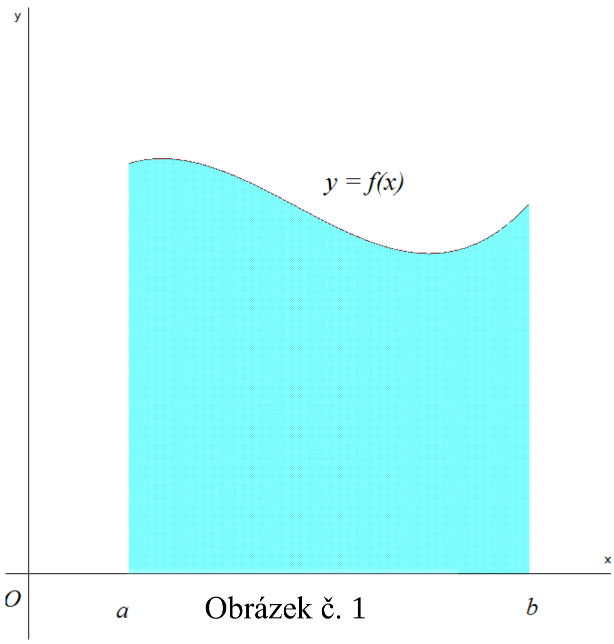
PaedDr. Naděžda Kubešová
VY_32_INOVACE_XII.55

Zavedení určitého integrálu

Určitý integrál má využití v řadě aplikací. Pomocí určitého integrálu můžeme například počítat obsahy ploch, délky křivek, objemy a pláště rotačních těles, statické momenty a momenty setrvačnosti rovinných obrazců, křivek a rotačních těles, souřadnice těžiště. S určitým integrálem se setkáme také ve fyzice (výpočet rychlosti, dráhy, práce, ...). Další aplikace nalezneme v ekonomice, financích, pravděpodobnosti a statistice a v mnoha dalších oborech.

V dalším textu budeme budovat definici určitého integrálu. Ukážeme použití primitivní funkce při výpočtu právě určitého integrálu.

Primitivní funkci k funkci $y = f(x)$ jsme definovali v otevřeném intervalu (a, b). Doplníme ji o krajní body a a b. Nechť pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ **platí** $F'(x) = f(x)$, kde derivací funkce F v bodě a rozumíme derivaci v bodě a zprava a v bodě b derivaci zleva. Potom je funkce F primitivní funkcí k funkci f na intervalu $\langle a, b\rangle$.



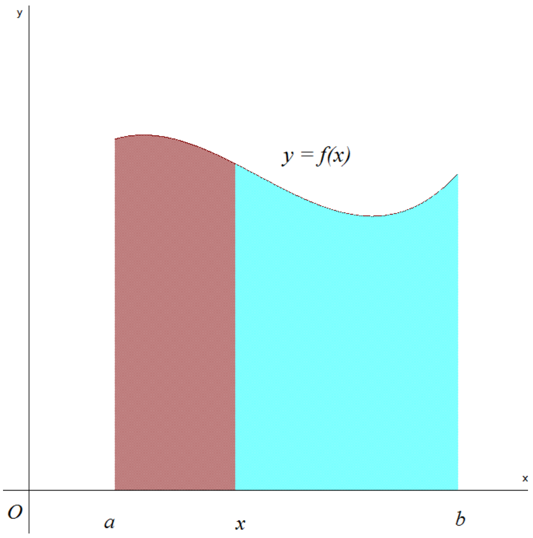
Obrázek č. 1

Uvažujme funkci $y = f(x)$, která je na intervalu $\langle a, b\rangle$ spojitá a nezáporná. Její graf v uvedeném intervalu, osa x a přímky $x = a$ a $x = b$ tvoří rovinný útvar, který si označíme U (můžeme jej specifikovat zápisem U(a, b, f)) a je zakreslen na obrázku č. 1. Budeme se snažit zjistit obsah S(U) specifikovaného rovinného útvaru. Označme m a M nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$. Pro obsah útvaru platí:

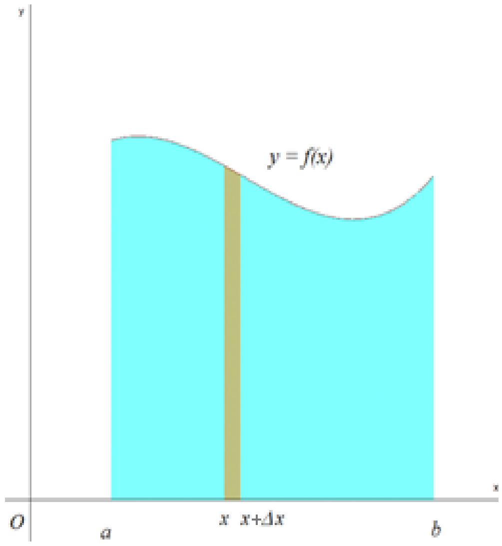
$$m(b-a) \leq S(\mathrm{U}) \leq M(b-a).$$

($m(b-a)$ je obsah vepsaného obdélníka a $M(b-a)$ je obsah obdélníka opsaného.)

Zvolme libovolné $x \in \langle a, b\rangle$ a uvažujme útvar U_x = U(a, x, f), viz obrázek č. 2. S měnícím se x se mění útvar i velikost jeho obsahu, je funkcí proměnné x. Tuto funkci označme $P(x)$, pro kterou platí $P(a) = 0$ a $P(b) = S$(U).



Obrázek č. 2



Obrázek č. 3

Uvažujme přírůstek funkce *P* (x) v bodě *x* (obrázek č. 3). Označme $\Delta P(x) = P(x + \Delta x) - P(x)$, což představuje obsah útvaru U (*x*, *x*+*Δx*, *f*). Funkce *f*(*x*) je v intervalu $\langle x, x + \Delta x\rangle$ spojitá, nabývá v tomto intervalu největší hodnotu $f(x_2)$ a nejmenší hodnotu $f(x_1)$, kde $x_1, x_2 \in \langle x, x + \Delta x\rangle$.

Pro ΔP platí: $f(x_1)\,\Delta x \leq \Delta P(x) \leq f(x_2)\,\Delta x$. Uvedenou nerovnost upravíme do tvaru: $f(x_1) \leq \frac{\Delta P(x)}{\Delta x} \leq f(x_2)$. Předcházející úvahy jsme provedli pro případ, kdy $\Delta x > 0$. Ke stejnému závěru bychom se dopracovali i pro případ, kdy $\Delta x < 0$.

Pokud se Δx bude blížit k 0 budou se x_1, x_2 blížit k *x*. Funkce *f*(*x*) je spojitá, proto $\lim_{x_1 \to x} f(x_1) = f(x)$ a $\lim_{x_2 \to x} f(x_2) = f(x)$, tedy $f(x) \leq \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta P(x)}{\Delta x} \leq f(x)$.

Z uvedeného plyne $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta P(x)}{\Delta x} = f(x)$. Použijeme definici derivace a dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x} = f(x),$$

$$P(x) = \int f(x)dx = F(x) + C,$$

Kde *F* je primitivní funkce k funkci *f*.

Funkci *P*(*x*) jsme zavedli jako obsah útvaru U(*a*, *x*, *f*).

Hodnota *P*(*b*) = *F*(*b*). Stačilo dosadit do předcházejícího vztahu. Hodnota *P*(*b*) = *F*(*b*) - *F*(*a*) vlastně představuje obsah útvaru U(*a*, *b*, *f*).

Než uvedeme definici určitého integrálu, připomeňme, že funkce *f* je spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$ a existuje k ní na tomto intervalu primitivní funkce *F*. Takových primitivních funkcí existuje nekonečně mnoho a liší se pouze o konstantu *c*. Označíme $G(x) = F(x) + c$. Určíme $G(b) - G(a) = F(b) - c - F(a) + c = F(b) - F(a)$.

Definice

Nechť funkce *f*(*x*) je spojitá v intervalu *J* a *F*(*x*) je její primitivní funkce. Potom pro libovolné *a*, *b* ∈ *J* rozdíl *F*(*b*) - *F*(*a*) nazýváme určitým integrálem funkce *f* v mezích od *a* do *b* a značíme $\int_a^b f(x)dx$.

Podle definice zapisujeme $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Proměnná *x* se nazývá integrační proměnná, číslo *a* dolní mez, číslo *b* horní mez integrálu. Funkce *f* se nazývá integrand.

Poznámka

Takto zavedený určitý integrál se nazývá Newtonova – Leibnizova formule pro výpočet určitého integrálu.

Při výpočtu určitého integrálu je zpravidla vhodné zapsat primitivní funkci ještě před dosazením mezí. Používáme zápis $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.