PaedDr. Naděžda Kubešová
VY_32_INOVACE_XII.56

Výpočet určitého integrálu

Příklad:

1. Na základě zavedení určitého integrálu vypočtěte $\int_{-1}^{2}(x^2 + 1)\mathrm{d}x$.

   Určíme primitivní funkci a dosadíme horní a dolní mez. Z výpočtu bude postup dobře patrný.

   $$\int_{-1}^{2}(x^2 + 1)dx = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_{-1}^{2} = \frac{8}{3} + 2 - \left(\frac{-1}{3} - 1\right) = 6$$

2. Vypočtěte $\int_{-3}^{-1}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$.

   $$\int_{-3}^{-1}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \left[\frac{-1}{x}\right]_{-3}^{-1} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Z uvedených jednoduchých příkladů je dobře patrné, že pro výpočet určitého integrálu spojité funkce využijeme veškeré znalosti z určování primitivních funkcí. Pro výpočet neurčitých integrálů jsme používali řadu vět a pravidel. V další části si je upravíme pro použití při výpočtu určitého integrálu.

Příklad:

3. Vypočtěte $\int_{1}^{2}(x^2 - 3x + 2)\mathrm{d}x$.

$$\int_{1}^{2}(x^2 + 3x + 2)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + 2x\right]_{1}^{2} = \frac{8}{3} + \frac{3.4}{2} + 4 - \frac{1}{3} - \frac{3.1}{2} - 2 = \frac{53}{6}$$

Pro výpočet primitivní funkce platí věta:

Nechť funkce *f*, *g* jsou spojité v otevřeném intervalu *J*, *k* a *l* libovolné reálné konstanty, potom platí:

$$\int(kf(x) + lg(\mathbf{x}))\mathrm{d}x = k\int f(x)dx + l\int g(x)dx + c \quad ;$$

kde *c* je integrační konstanta.

Pro uvedenou funkci vypadá aplikace uvedené věty následujícím způsobem

$$\int(x^2 + 3x + 2)\mathrm{d}x = \int \mathbf{x}^2\mathrm{d}x + 3\int x\,\mathrm{d}x + 2\int \mathrm{d}x + c$$

Stejný postup použijeme i pro výpočet určitého integrálu z příkladu 3 a porovnáme výsledek.

PaedDr. Naděžda Kubešová

$$\int_1^2 (x^2+3x+2)\mathrm{d}x = \int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x + 3\int_1^2 x\,\mathrm{d}x + 2\int_1^2 \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 + 3\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 + 2\,[x]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} + 3.\frac{4}{2} - 3.\frac{1}{2}$$

.

Oba výsledky jsou stejné. Postup zobecníme do věty.

Věta

Nechť funkce *f, g* jsou spojité v intervalu *J*, nechť *a, b* náleží intervalu *J* a *k, l* libovolné reálné konstanty, potom platí:

$$\int_a^b (kf(x) + lg(x))\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + l\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

Důkaz lze snadno provést přímo z definice určitého integrálu.

Příklad

4. Vypočtěte $\int_1^8 \frac{\sqrt{x} - x^2}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$

$$\int_1^8 \frac{\sqrt{x} - x^2}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x = \int_1^8 \left(x^{\frac{1}{6}} - x^{\frac{5}{3}}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{6x^{\frac{7}{6}}}{7} - \frac{3x^{\frac{8}{3}}}{8}\right]_1^8 = \frac{6}{7}8\sqrt[6]{8} - \frac{3}{8}8^2\sqrt[3]{8^2} - \frac{6}{7} + \frac{3}{8} = -86{,}8$$

.

Výsledek je záporný. Znaménko určitého integrálu závisí na průběhu integrované funkce. Může být i záporné a to například v případě, kdy graf funkce leží v intervalu $\langle a, b\rangle$ pod osou *x*.

5. Vypočtěte $\int_{-1}^1 \frac{3x^2 - x + 1}{x^4}\mathrm{d}x$.

Výpočet integrálu se jeví jako jednoduchý. V jeho zadání je ukryt jeden problém. Zadaná funkce není v intervalu $\langle -1,1\rangle$ spojitá a zavedenou definicí nelze provést výpočet.

V další definici zavedeme chování integrálu v případech, kdy prohodíme dolní a horní mez. Další mezní případ nastává při rovnosti horní a dolní meze.

Definice

1. **Je – li *a* < *b* a existuje – li $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, potom $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.**
2. **Je – li funkce *f* definovaná v bodě *a*, potom $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$.**

PaedDr. Naděžda Kubešová

Věta

Je – li funkce *f* spojitá v intervalu *J*, který obsahuje libovolná tři čísla *a, b, c*, potom platí

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Důkaz je jednoduchý.

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Úlohy

1. Vypočtěte $\int_{-1}^{2} (x^2 - x + 5)\mathrm{d}x$.

2. Vypočtěte $\int_{1}^{3} \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - \sqrt[3]{x}\right)\mathrm{d}x$.

PaedDr. Naděžda Kubešová

3. Vypočtěte $\int_{1}^{e}\left(-\frac{3}{x}+2\right)\mathrm{d}x$.

4. Vypočtěte $\int_{0}^{\pi} 2\sin x \,\mathrm{d}x$.

PaedDr. Naděžda Kubešová

5. Vypočtěte $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos(x))\, \mathbf{d}x$.

[Řešení: 1. $\frac{33}{2}$; 2. 0,433; 3. 2*e* -5 =0,436; 4. 4; 5. 2]