Důkazy – seminář – materiál do 27.4.

MAT. DŮKAZY

4

1) mat. indukce

a) $n = 1$

b) předpokládáme pro $n = k$

c) dokážeme pro $n = k+1$

př. $1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2} n(n+1)$

1) $n = 1$

$1 = \frac{1}{2}(1+1)$

$L = P$

2) $n = k$

$1 + 2 + \dots + k = \frac{1}{2} k(k+1)$

3) $n = k+1$

$\frac{1}{2} k(k+1) + k+1 = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$

$\frac{1}{2}(k^2+k) + (k+1) = $ —"—

$\frac{1}{2}(k+1)(k+2) = $ —"—

$L = P$

2) přímý důkaz

V: $p \Rightarrow q$

$\forall n \in N$, je-li n sudé, pak n^2 je sudé

n je sudé $\Rightarrow n = 2k$

$n = 2k \quad n^2 = (2k)^2 = 2 \cdot 2k^2$

n^2 sudé

3) nepřímý důkaz

$p \Rightarrow q$

dokazujeme obměnu věty (je ekvivalentní s pův. větou)

n^2 je sudé $\Rightarrow n$ je sudé

obměna $\forall n \in N \quad \neg(n$ je sudé$) \Rightarrow \neg(n^2$ je sudé$)$

$\forall n \in N \quad n$ je liché $\Rightarrow n^2$ je liché

$n = 2k+1$

$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2k(2k+2) + 1$ $\Rightarrow$ je liché

4) důkaz sporem

V $p \Rightarrow q$

$\neg$V $\neg(p \Rightarrow q) = p \wedge \neg q$

dokazujeme negaci věty (vede ke sporu) $\Rightarrow$ platí pův. věta

V $\forall n \in N \quad n^2$ je sudé $\Rightarrow n$ je sudé

$\neg$V $\quad n^2$ je sudé a zároveň n je liché

n^2 je sudé $n = 2k$

n je liché $n = 2k+1$

n^2 je liché $4k^2 + 4k + 1 = 2k(2k+2) + 1$

$\Rightarrow n^2$ je liché

spor s předpokladem $\Rightarrow$ platí pův. věta

V $\sqrt{2}$ není rac. číslo

$\neg$V $\sqrt{2}$ je rac. číslo

$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad p, q$ – nesoudělná čísla

$2 = \frac{p^2}{q^2}$

$2q^2 = p^2 \quad p$ = sudé číslo

$p = 2k$

$2q^2 = (2k)^2$

q^2 – sudé, q – sudé

spor s předpokladem, že p, q – nesoudělná čísla

– platí pův. věta

$5 \mid n^2 + 1 \Rightarrow 5 \nmid n$

– nepřímo

obměna $5 \mid n \Rightarrow 5 \nmid n^2 + 1$

$5 \mid n \quad \exists k \in N \quad n = 5k$

$(n^2+1) = 25k^2 + 1 = 5 \cdot 5k + 1$

$\Rightarrow 5 \nmid n^2 + 1$

$(\forall n \in N) \quad 4 \mid n^4 + 3n^2$

1) $4k$

$(4k)^4 + 3(4k)^2$

2) $4k+1$

3) $4k+2$

4) $4k+3$

PŘÍKLADY:

Př. V: $\forall n \in N: 6 \mid n^3 - n$

$n^3 - n = n \cdot (n^2 - 1) = n(n-1)(n+1) = (n-1) \cdot n \cdot (n+1) \Rightarrow$ alespoň 1 z těchto čísel je dělitelné 3 $\wedge$ alespoň 1 z nich je dělitelné 2 $\Rightarrow 6 \mid n^3 - n$

Př. $\forall n \in N: 5 \mid n^2 + 1 \Rightarrow 5 \nmid n$

O: $\forall n \in N: 5 \mid n \Rightarrow 5 \nmid n^2 + 1$

$5 \mid n \Rightarrow n = 5k \Rightarrow n^2 = 25k^2 \Rightarrow n^2 + 1 = 25k^2 + 1 =$

$= 5 \cdot 5k^2 + 1 \Rightarrow 5 \nmid n^2 + 1$

Př. V: číslo 2 není rac. číslo

$\neg$V: číslo 2 je rac. číslo

$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \; / \cdot q \quad p, q$ nesoudělné $\wedge q \neq 0$

$\sqrt{2} q = p \; / ()^2$ ~~[illegible]~~

$2q^2 = p^2 \Rightarrow p^2$ je sudé $\quad \cancel{p^2 = 2k}$

$\Rightarrow p$ je sudé $p = 2k$

$2q^2 = 4k^2 \; / 2$

$q^2 = 2k^2 \Rightarrow q^2$ je sudé $\Rightarrow q$ je sudé

spor, že jsou nesoudělné

spor

platí věta původní.

DŮKAZ MATEMATICKOU INDUKCÍ

užívá se pro tzv. obecnou formu

$(\forall n \in N), n \geq n_0 : V(n)$

n_0 – nejmenší číslo

$V(n)$ – výroková forma s proměnnou n

1. dokážeme pro $n = n_0$

2. dokážeme, že za předpokladu, že $V(k)$ platí pro lib. $k \geq n_0$, pak také platí $V(k+1)$

Př. $1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2} n(n+1)$

1. $n = 1 \quad 1 = \frac{1}{2} 1(1+1)$

$1 = 1$

$L = P$

2. $n = k \quad 1 + 2 + \dots + k = \frac{1}{2} k(k+1)$

$n = k+1 \quad 1 + 2 + \dots + k + (k+1) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$

$\frac{1}{2} k(k+1) + (k+1)$

$(k+1)(\frac{1}{2}k + 1)$

$\frac{1}{2}(k+1)(k+2) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$

$L = P$

Př. Dokaž $\forall n \in N \quad 11 \mid 6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$

1) $n = 1 \quad 6^2 + 3^3 + 3 = 36 + 27 + 3 = 66 = 6 \cdot 11 \Rightarrow 11 \mid 66$

$11 \mid V(n=1)$

2) $n = k \quad 11 \mid 6^{2k} + 3^{k+2} + 3^k$ neboli

$6^{2k} + 3^{k+2} + 3^k = 11p$

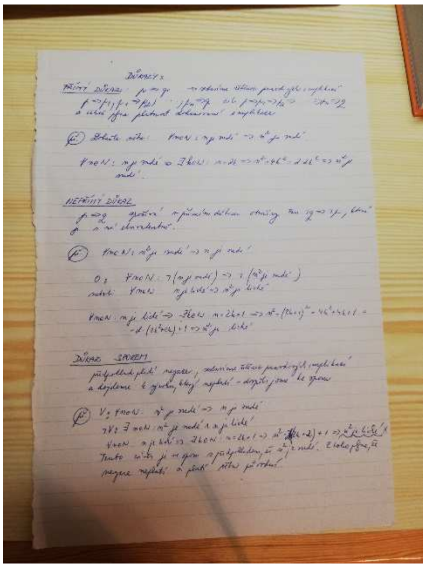
$n = k+1 \quad 6^{2(k+1)} + 3^{k+3} + 3^{k+1} =$

$= 6^{2k+2} + 3^{k+2+1} + 3^k \cdot 3 =$

$= 36 \cdot 6^{2k} + 3 \cdot 3^{k+2} + 3 \cdot 3^k =$

$= 3\underbrace{(6^{2k} + 3^{k+2} + 3^k)} + 33 \cdot 6^{2k} = 3 \cdot 11p + 11 \cdot 3 \cdot 6^{2k} =$

$= 11(3p + 11 \cdot 6^{2k}) \Rightarrow 11 \mid V(k+1)$


DŮKAZY:

PŘÍMÝ DŮKAZ: $p \Rightarrow q$ → sestavíme řetězec pravdivých implikací
$p \Rightarrow p_1, p_1 \Rightarrow p_2, \dots, p_n \Rightarrow q$
a z toho plyne platnost dokazované implikace

Př: Dokažte, že: $\forall n \in N$: n je sudé $\Rightarrow n^2$ je sudé

$\forall n \in N$: n je sudé $\Rightarrow \exists k \in N: n = 2k \Rightarrow n^2 = 4k^2 = 2 \cdot 2k^2 \Rightarrow n^2$ je sudé.

NEPŘÍMÝ DŮKAZ

$p \Rightarrow q$ nahradíme přímým důkazem obměny $\neg q \Rightarrow \neg p$, která je s ní ekvivalentní.

Př: $\forall n \in N$: n^2 je sudé $\Rightarrow n$ je sudé

O: $\forall n \in N$: $\neg$(n je sudé) $\Rightarrow \neg$(n^2 je sudé)
neboli $\forall n \in N$: n je liché $\Rightarrow n^2$ je liché

$\forall n \in N$: n je liché $\Rightarrow \exists k \in N: n = 2k+1 \Rightarrow n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2 \cdot (2k^2+2k)+1 \Rightarrow n^2$ je liché

DŮKAZ SPOREM

předpokládáme platit negaci, sestavíme řetězec pravdivých implikací a dojdeme k výroku, který neplatí – dospěli jsme ke sporu

Př: V: $\forall n \in N$: n^2 je sudé $\Rightarrow n$ je sudé
$\neg$V: $\exists n \in N$: n^2 je sudé $\wedge$ n je liché
$\forall n \in N$: n je liché $\Rightarrow \exists k \in N: n = 2k+1 \Rightarrow n^2 = \dots(k+2)+1 \Rightarrow n^2$ je liché!
Tento závěr je ve sporu s předpokladem, že n^2 je sudé. Z toho plyne, že negace neplatí a platí výrok původní.