71. ročník Matematické olympiády (2021/2022)

Zadání úloh domácí části I. kola

Kategorie A

1. Je možné vyplnit tabulku $n \times n$ jedničkami a dvojkami tak, aby byl součet čísel v každém řádku dělitelný pěti a součet čísel v každém sloupci dělitelný sedmi? Řešte a) pro $n = 9$, b) pro $n = 12$. (*Tomáš Bárta*)

2. Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami AB a CD. Označme k_1 a k_2 kružnice s průměry BC a AD. Dále označme P průsečík přímek BC a AD. Dokažte, že tečny z bodu P ke kružnici k_1 svírají stejný úhel jako tečny z bodu P ke kružnici k_2.
(*Patrik Bak*)

3. Najděte všechna celá čísla $n > 2$ taková, že číslo n^{n-2} je n-tá mocnina celého čísla.
(*Patrik Bak*)

4. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$xy + 1 = z^2,$$
$$yz + 2 = x^2,$$
$$zx + 3 = y^2.$$

(*Tomáš Jurík*)

5. V různostranném trojúhelníku ABC označme I střed vepsané kružnice a k kružnici opsanou. Polopřímky BI a CI protnou kružnici k po řadě v bodech $S_b \neq B$ a $S_c \neq C$. Dokažte, že tečna ke kružnici k v bodě A, přímka vedená bodem I rovnoběžně se stranou BC a přímka S_bS_c se protínají v jednom bodě. (*Patrik Bak*)

6. Uvažujme nekonečnou posloupnost $a_0, a_1, a_2, \ldots$ celých čísel, která splňuje podmínky $a_0 \geqq 2$ a $a_{n+1} \in \{2a_n - 1, 2a_n + 1\}$ pro všechny indexy $n \geqq 0$. Dokažte, že každá taková posloupnost obsahuje nekonečně mnoho složených čísel.
(*Martin Melicher, Josef Tkadlec*)

Kategorie B

1. Pravoúhlý trojúhelník má celočíselné délky stran a obvod 11 990. Navíc víme, že jedna jeho odvěsna má prvočíselnou délku. Určete ji. (*Patrik Bak*)

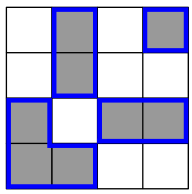
2. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník s nejdelší stranou BC. Uvnitř stran AB a AC leží po řadě body D a E tak, že $|CD| = |CA|$ a $|BE| = |BA|$. Označme F takový bod, že $ABFC$ je rovnoběžník. Dokažte, že $|FD| = |FE|$. (*Patrik Bak, Josef Tkadlec*)

3. Určete počet devítimístných čísel, v nichž se číslice $0 - 9$ vyskytují nejvýše jednou a v nichž se součty číslic na 1. až 3. místě, na 3. až 5. místě, na 5. až 7. místě a na 7. až 9. místě všechny rovnají témuž číslu 10. Najděte rovněž nejmenší a největší z těchto čísel. (*Jaroslav Zhouf*)

4. Určete počet reálných kořenů rovnice $x|x + 6A| = 36$ v závislosti na reálném parametru A. (*Vojtěch Bálint*)

5. Pravidelný n-úhelník označme $A_1A_2...A_n$. Bod A_3 zobrazíme v osové souměrnosti s osou A_2A_4, získáme bod A_3'. Pak bod A_3' zobrazíme v osové souměrnosti s osou A_1A_3, získáme bod A_3''. Pro která $n \geqq 4$ je bod A_3'' totožný s průsečíkem přímek A_1A_2 a A_3A_4? (*Jaroslav Zhouf*)

6. Je dána šachovnice $m \times n$, jejíž políčka jsou obarvena černě a bíle klasickým způsobem, přičemž levé horní políčko je černé. *Tahem* rozumíme vzájemnou výměnu dvou řádků nebo vzájemnou výměnu dvou sloupců šachovnice. *Skvrnou* rozumíme takovou neprázdnou množinu černých políček, která je tvořena všemi políčky, do nichž lze z jednoho jejího políčka přejít po cestě sestávající ze stranou sousedících černých políček. Například na obrázku je šachovnice 4×4 s právě čtyřmi skvrnami. V závislosti na přirozených číslech m a n určete, kolik nejméně skvrn může být na šachovnici $m \times n$ po provedení konečného počtu tahů. (*David Hruška*)



Kategorie C

1. Na školní zahradě hraje skupina žáků hru zvanou molekuly. Učitel jim nejprve uložil, aby se rozdělili do trojic. Jeden žák přebyl, a tak z další hry vypadl. Zbylí žáci se pak měli rozdělit do čtveřic. Opět jeden žák přebyl a vypadl. Poté se zbylí žáci měli rozdělit do pětic, zase jeden žák přebyl a vypadl. Učitel nyní ukládá, aby se zbylí žáci rozdělili do šestic. Dokažte, že opět jeden žák přebyde. (*Josef Tkadlec*)

2. Určete všechny čtveřice různých dvojmístných přirozených čísel, pro které zároveň platí:

(i) Součet těch čísel z dané čtveřice, která obsahují číslici 2, je 80.
(ii) Součet těch čísel z dané čtveřice, která obsahují číslici 3, je 90.
(iii) Součet těch čísel z dané čtveřice, která obsahují číslici 5, je 60.

(*Jaroslav Zhouf*)

3. Uvnitř strany BC libovolného trojúhelníku ABC jsou dány body D, E tak, že $|BD| = |DE| = |EC|$, uvnitř strany AC body F, G tak, že $|AG| = |GF| = |FC|$. Uvažujme trojúhelník vymezený úsečkami AE, GD, BF. Dokažte, že poměr obsahu tohoto trojúhelníku a obsahu trojúhelníku ABC má jedinou možnou hodnotu, a určete ji. (*Jaroslav Zhouf*)

4. Tabulka 10×10 je vyplněna čísly 1 a -1 tak, že součet čísel v každém řádku až na jeden je roven nule a zároveň součet čísel v každém sloupci až na jeden je roven nule. Určete největší možný součet všech čísel v tabulce. (*Patrik Bak*)

5. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC a uvnitř jeho strany AB bod D. Na polopřímce opačné k BC uvažme bod E takový, že $|CD| = |DE|$. Dokažte, že platí $|AD| = |BE|$. (*Jaroslav Švrček*)

6. Určete všechny možné hodnoty součtu $a+b+c+d$, kde a, b, c, d jsou přirozená čísla splňující rovnost

$$\left(a^2-b^2\right)\left(c^2-d^2\right)+\left(b^2-d^2\right)\left(c^2-a^2\right)=2021.$$

(*Mária Dományová, Patrik Bak*)