ÚLOHY DOMÁCÍ ČÁSTI 1. KOLA
63. ROČNÍKU MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
PRO ŽÁKY STŘEDNÍCH ŠKOL (2013/2014)

Kategorie A

Studijní téma: *Apolloniova kružnice* (viz L. Boček, J. Zhouf: *Máte rádi kružnice?*, Prometheus, Praha, 1995, str. 11–14.)

1. Číslo n je součinem tří (ne nutně různých) prvočísel. Zvětšíme-li každé z nich o 1, zvětší se jejich součin o 963. Určete původní číslo n. (*Pavel Novotný*)

2. Pro libovolná kladná reálná čísla x, y, z dokažte nerovnost

$$(x+y+z)\Big(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\Big) \le m^2, \quad \text{kde } m = \min\Big(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}, \frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\Big).$$

Zjistěte rovněž, kdy v dokázané nerovnosti nastane rovnost.
(*Jaroslav Švrček, Jaromír Šimša*)

3. Označme I střed kružnice vepsané danému trojúhelníku ABC. Předpokládejme, že kolmice na přímku CI vedená bodem I protne přímku AB v bodě M. Dokažte, že kružnice trojúhelníku ABC opsaná protne úsečku CM ve vnitřním bodě N a že přímky NI a MC jsou navzájem kolmé. (*Peter Novotný*)

4. Označme $l(n)$ největšího lichého dělitele čísla n. Určete hodnotu součtu

$$l(1) + l(2) + l(3) + \cdots + l(2^{2013}).$$

(*Michal Rolínek*)

5. Kolika různými způsoby můžeme vydláždit plochu 3×10 dlaždicemi 2×1, lze-li je pokládat v obou navzájem kolmých směrech? (*Stanislava Sojáková*)

6. V rovině daného trojúhelníku ABC určete všechny body, jejichž obrazy v osových souměrnostech podle přímek AB, BC, CA tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníku. (*Pavel Calábek*)

63. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY PRO ŽÁKY STŘEDNÍCH ŠKOL

Kategorie B

1. Každému vrcholu pravidelného 63úhelníku přiřadíme jedno z čísel 1 nebo -1. Ke každé jeho straně připíšeme součin čísel v jejích vrcholech a všechna čísla u jednotlivých stran sečteme. Najděte nejmenší možnou nezápornou hodnotu takového součtu. (*Pavel Calábek*)

2. Určete všechny dvojice (x, y) reálných čísel, které vyhovují nerovnici

$$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \geq \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2.$$

(*Jaroslav Švrček*)

3. Nechť D je libovolný vnitřní bod strany AB trojúhelníku ABC. Na polopřímkách BC a AC zvolme po řadě body E a F tak, aby platilo $|BD| = |BE|$ a $|AD| = |AF|$. Dokažte, že body C, E, F a střed I kružnice vepsané trojúhelníku ABC leží na téže kružnici. (*Jaroslav Švrček*)

4. Dana napsala na papír trojmístné číslo, které při dělení sedmi dává zbytek 2. Přehozením prvních dvou číslic vzniklo trojmístné číslo, které při dělení sedmi dává zbytek 3. Číslo vzniklé přehozením posledních dvou číslic původního čísla dává při dělení sedmi zbytek 5. Jaký zbytek při dělení sedmi bude mít číslo, které vznikne přehozením první a poslední číslice Danina čísla? (*Pavel Novotný*)

5. V rovině jsou dány body A, T, U tak, že úhel ATU je tupý. Sestrojte trojúhelník ABC, ve kterém T, U jsou po řadě body dotyku strany BC s kružnicí trojúhelníku vepsanou a připsanou. (Kružnicí připsanou tu rozumíme kružnici, která se kromě strany BC dotýká i polopřímek opačných k polopřímkám BA a CA.) (*Šárka Gergelitsová*)

6. Najděte nejmenší reálné číslo r takové, že tyč o délce 1 lze rozlomit na čtyři části délky nejvýše r tak, aby ze žádných tří těchto částí nešlo složit trojúhelník. (*Ján Mazák*)

63. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY PRO ŽÁKY STŘEDNÍCH ŠKOL

Kategorie C

1. Určete, jaké nejmenší hodnoty může nabýt výraz $V = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$, splňují-li reálná čísla a, b, c dvojici podmínek

$$\begin{aligned} a + 3b + c &= 6, \\ -a + b - c &= 2. \end{aligned}$$

(*Jaroslav Švrček*)

2. V rovině jsou dány body A, P, T neležící v přímce. Sestrojte trojúhelník ABC tak, aby P byla pata jeho výšky z vrcholu A a T bod dotyku strany AB s kružnicí mu vepsanou. Proveďte diskusi počtu řešení vzhledem k poloze daných bodů.

(*Pavel Leischner*)

3. Číslo n je součinem tří různých prvočísel. Zvětšíme-li dvě menší z nich o 1 a největší ponecháme nezměněno, zvětší se jejich součin o 915. Určete číslo n.

(*Pavel Novotný*)

4. Ve čtverci $ABCD$ označme K střed strany AB a L střed strany AD. Úsečky KD a LC se protínají v bodě M a rozdělují čtverec na dva trojúhelníky a dva čtyřúhelníky. Vypočtěte jejich obsahy, jestliže úsečka LM má délku 1 cm.

(*Leo Boček*)

5. Dokažte, že pro každé liché přirozené číslo n je součet $n^4 + 2n^2 + 2\,013$ dělitelný číslem 96. (*Jaromír Šimša*)

6. Šachového turnaje se zúčastnilo 8 hráčů a každý s každým odehrál jednu partii. Za vítězství získal hráč 1 bod, za remízu půl bodu, za prohru žádný bod. Na konci turnaje měli všichni účastníci různé počty bodů. Hráč, který skončil na 2. místě, získal stejný počet bodů jako poslední čtyři dohromady. Určete výsledek partie mezi 4. a 6. hráčem v celkovém pořadí. (*Vojtech Bálint*)