

# MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA NA STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH

kategorie A, B, C a P  
63. ROČNÍK, 2013/2014  
<http://math.muni.cz/mo>

Studenti středních škol,

zveme vás k účasti v matematické olympiádě, jejíž soutěžní kategorie A, B, C a P pořádáme právě pro vás.

Kategorie A je určena žákům maturitních a předmaturitních ročníků, kategorie B žákům, kterým do maturity zbývá více než 2 roky, kategorie C žákům, kterým do maturity zbývá více než 3 roky, kategorie P je zaměřena na programování a je určena žákům všech ročníků.

Podrobnější rozdělení uvádí následující tabulka:

Předpokládaný školní rok ukončení studia maturitou	kategorie MO
2013/2014	A
2014/2015	A
2015/2016	B
2016/2017	C

Žáci nižších ročníků víceletých gymnázií soutěží v MO společně s žáky základních škol v kategoriích Z6 až Z9. Jim je věnován zvláštní leták.

**Průběh soutěže v kategoriích A, B, C:** V kategorii A probíhá soutěž ve třech kolech (školním, krajském a ústředním), v kategoriích B a C probíhá ve dvou kolech (školním a krajském).

**Školní kolo** má dvě části – domácí a klauzurní. V **domácí části** na vás čeká šest úloh, které najdete v tomto letáku. Jejich řešení (ne nutně všech) odevzdejte svému učiteli matematiky do **2. prosince 2013** (kategorie A) a do **13. ledna 2014** (kategorie B, C). Ten je opraví, ohodnotí podle stupnice *1 – výborně, 2 – dobře, 3 – nevyhovuje*. Pak je s vámi rozebere, vysvětlí vám případné nedostatky a seznámí vás se správným řešením, které také najdete na našich internetových stránkách. Jestliže budou vaše řešení alespoň čtyř úloh ohodnocena jako výborná nebo dobrá, budete pozváni do **klauzurní části** školního kola. Tam budete ve stanoveném čase samostatně řešit další tři úlohy.

Nejlepší účastníci školního kola budou pozváni do **krajského kola**. Tam budou během čtyř hodin samostatně řešit čtyři úlohy. Podle rozhodnutí Ústřední komise MO z března 2011 nebudou od školního roku 2011/2012

v klauzurních kolech MO povoleny kalkulačky, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky. O pořadí v krajských kolech soutěže rozhoduje součet bodů získaných za jednotlivé úlohy, a to 0 až 6 bodů za každou z nich. Bodové hranice k určení úspěšných řešitelů a úspěšných účastníků budou stanoveny centrálně po vyhodnocení statistik bodových výsledků ze všech krajů. Podrobnější pravidla pro vyhodnocování krajských kol najdete na <http://www.math.muni.cz/mo>.

V kategorii A budou ještě nejlepší řešitelé krajského kola z celé republiky soutěžit v **ústředním kole**, a to za podmínek podobných jako na **mezinárodní matematické olympiádě**, kde během soutěže lze používat pouze psací a rýsovací potřeby. Právě pro ni se z vítězů ústředního kola vybere družstvo České republiky.

**Průběh soutěže v kategorii P:** Ve **školním kole** řešíte jen čtyři úlohy uvedené v tomto letáku spolu s pokyny, jak máte naložit s řešeními, která nebudete odevzdávat ve škole.

V kategorii P se nekoná klauzurní část školního kola, takže úspěšní řešitelé domácích úloh budou pozváni přímo do **krajského kola**. Stejně jako v kategorii A se i v kategorii P koná **ústřední kolo**, jehož vítězové se zúčastní každoroční **mezinárodní olympiády v informatice**.

Termíny soutěžních kol 63. ročníku MO jsou stanoveny takto:

	I. kolo (školní část)	II. kolo (krajské)	III. kolo (ústřední)
Kategorie A	10.12. 2013	14.1. 2014	23.3.–26.3. 2014
Kategorie B, C	23.1. 2014	8.4. 2014	—
Kategorie P	—	21.1. 2014	26.3.–29.3. 2014

MO pořádají *Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČR, Jednota českých matematiků a fyziků a Matematický ústav Akademie věd České republiky*. Soutěž organizuje *ústřední komise MO* a v krajích ji řídí *krajské komise MO* při pobočkách JČMF. Na jednotlivých školách ji zajišťují pověřeni učitelé matematiky, na které se můžete s otázkami kolem MO kdykoli obracet.

**Řešení soutěžních úloh vypracujte čitelně na listy formátu A4. Každou úlohu začněte na novém listě a uveďte vlevo nahoře záhlaví podle vzoru:**

Karel Smutný  
2. D, gymnázium  
Kulaté nám. 9, 629 79 Lužany  
B–I–4

Poslední údaj je označení úlohy podle tohoto letáku. Znění úloh nemusíte opisovat. Nevejde-li se vám řešení na jeden list, uveďte na dalších listech vlevo nahoře své jméno a označení úlohy a očísľujte stránky. **Řešení pište jako výklad, v kterém jsou uvedeny všechny podstatné úvahy tak, aby bylo možno sledovat váš myšlenkový postup.**

## Kategorie A

1. Číslo  $n$  je součinem tří (ne nutně různých) prvočísel. Zvětšíme-li každé z nich o 1, zvětší se jejich součin o 963. Určete původní číslo  $n$ .

(Pavel Novotný)

2. Pro libovolná kladná reálná čísla  $x, y, z$  dokažte nerovnost

$$(x + y + z) \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \leq m^2, \quad \text{kde } m = \min \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}, \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} \right).$$

Zjistěte rovněž, kdy v dokazované nerovnosti nastane rovnost.

(Jaroslav Švrček, Jaromír Šimša)

3. Označme  $I$  střed kružnice vepsané danému trojúhelníku  $ABC$ . Předpokládejme, že kolmice na přímkou  $CI$  vedená bodem  $I$  protne přímkou  $AB$  v bodě  $M$ . Dokažte, že kružnice trojúhelníku  $ABC$  opsaná protne úsečku  $CM$  ve vnitřním bodě  $N$  a že přímkou  $NI$  a  $MC$  jsou navzájem kolmé.

(Peter Novotný)

4. Označme  $l(n)$  největšího lichého dělitele čísla  $n$ . Určete hodnotu součtu

$$l(1) + l(2) + l(3) + \dots + l(2^{2013}).$$

(Michal Rolínek)

5. Kolika různými způsoby můžeme vydláždit plochu  $3 \times 10$  dlaždicemi  $2 \times 1$ , lze-li je pokládat v obou navzájem kolmých směrech?

(Stanislava Sojáková)

6. V rovině daného trojúhelníku  $ABC$  určete všechny body, jejichž obrazy v osových souměrnostech podle přímkou  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníku.

(Pavel Calábek)

Studijní téma: *Apolloniova kružnice* (viz L. Boček, J. Zhouf: *Máte rádi kružnice?*, Prometheus, Praha, 1995, str. 11–14.)

## Kategorie B

1. Každému vrcholu pravidelného 63úhelníku přiřadíme jedno z čísel 1 nebo  $-1$ . Ke každé jeho straně přepíšeme součin čísel v jejích vrcholech a všechna čísla u jednotlivých stran sečteme. Najděte nejmenší možnou nezápornou hodnotu takového součtu. *(Pavel Calábek)*

2. Určete všechny dvojice  $(x, y)$  reálných čísel, které vyhovují nerovnici

$$(x + y) \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \geq \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right)^2.$$

*(Jaroslav Švrček)*

3. Nechť  $D$  je libovolný vnitřní bod strany  $AB$  trojúhelníku  $ABC$ . Na polopřímkách  $BC$  a  $AC$  zvolme po řadě body  $E$  a  $F$  tak, aby platilo  $|BD| = |BE|$  a  $|AD| = |AF|$ . Dokažte, že body  $C$ ,  $E$ ,  $F$  a střed  $I$  kružnice vepsané trojúhelníku  $ABC$  leží na téže kružnici.

*(Jaroslav Švrček)*

4. Dana napsala na papír trojmístné číslo, které při dělení sedmi dává zbytek 2. Přehozením prvních dvou číslic vzniklo trojmístné číslo, které při dělení sedmi dává zbytek 3. Číslo vzniklé přehozením posledních dvou číslic původního čísla dává při dělení sedmi zbytek 5. Jaký zbytek při dělení sedmi bude mít číslo, které vznikne přehozením první a poslední číslice Danina čísla? *(Pavel Novotný)*

5. V rovině jsou dány body  $A$ ,  $T$ ,  $U$  tak, že úhel  $ATU$  je tupý. Sestrojte trojúhelník  $ABC$ , ve kterém  $T$ ,  $U$  jsou po řadě body dotyku strany  $BC$  s kružnicí trojúhelníku vepsanou a připsanou. (Kružnicí připsanou tu rozumíme kružnici, která se kromě strany  $BC$  dotýká i polopřímek opačných k polopřímkám  $BA$  a  $CA$ .) *(Šárka Gergelitsová)*

6. Najděte nejmenší reálné číslo  $r$  takové, že tyč o délce 1 lze rozlomit na čtyři části délky nejvýše  $r$  tak, aby ze žádných tří těchto částí nešlo složit trojúhelník. *(Ján Mazák)*

## Kategorie C

1. Určete, jaké nejmenší hodnoty může nabýt výraz

$$V = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2,$$

splňují-li reálná čísla  $a, b, c$  dvojici podmínek

$$a + 3b + c = 6,$$

$$-a + b - c = 2.$$

(Jaroslav Švrček)

2. V rovině jsou dány body  $A, P, T$  neležící v přímce. Sestrojte trojúhelník  $ABC$  tak, aby  $P$  byla pata jeho výšky z vrcholu  $A$  a  $T$  bod dotyku strany  $AB$  s kružnicí mu vepsanou. Proveďte diskusi počtu řešení vzhledem k poloze daných bodů.  
(Pavel Leischner)

3. Číslo  $n$  je součinem tří různých prvočísel. Zvětšíme-li dvě menší z nich o 1 a největší ponecháme nezměněno, zvětší se jejich součin o 915. Určete číslo  $n$ .  
(Pavel Novotný)

4. Ve čtverci  $ABCD$  označme  $K$  střed strany  $AB$  a  $L$  střed strany  $AD$ . Úsečky  $KD$  a  $LC$  se protínají v bodě  $M$  a rozdělují čtverec na dva trojúhelníky a dva čtyřúhelníky. Vypočtete jejich obsahy, jestliže úsečka  $LM$  má délku 1 cm.  
(Leo Boček)

5. Dokažte, že pro každé liché přirozené číslo  $n$  je součet  $n^4 + 2n^2 + 2013$  dělitelný číslem 96.  
(Jaromír Šimša)

6. Šachového turnaje se zúčastnilo 8 hráčů a každý s každým odehrál jednu partii. Za vítězství získal hráč 1 bod, za remízu půl bodu, za prohru žádný bod. Na konci turnaje měli všichni účastníci různé počty bodů. Hráč, který skončil na 2. místě, získal stejný počet bodů jako poslední čtyři dohromady. Určete výsledek partie mezi 4. a 6. hráčem v celkovém pořadí.  
(Vojtech Bálint)



## KATEGORIE P

Úlohy P-I-1 a P-I-2 jsou praktické, vaším úkolem v nich je vytvořit a odlatit efektivní program v jazyce Pascal, C nebo C++. Řešení těchto dvou úloh odevzdávejte ve formě zdrojového kódu přes webové rozhraní přístupné na stránce <http://mo.mff.cuni.cz/submit/>, kde také naleznete další informace. Odevzdaná řešení budou automaticky vyhodnocena pomocí připravených vstupních dat a výsledky vyhodnocení se dozvíte krátce po odevzdání. Pokud váš program nezíská plný počet 10 bodů, můžete své řešení opravit a znovu odevzdat.

Úlohy P-I-3 a P-I-4 jsou teoretické, vaším úkolem je nalézt efektivní algoritmus řešící zadaný problém. Řešení úlohy se skládá z popisu navrženého algoritmu, zdůvodnění jeho správnosti (funkčnosti) a u úlohy P-I-3 také odhadu časové a paměťové složitosti. Součástí řešení úlohy P-I-3 je i zápis navrženého algoritmu ve formě zdrojového kódu nebo pseudokódu. Řešení úlohy P-I-4 musí obsahovat program, ve kterém můžete využívat volání funkcí „mimozemských počítačů KSP“. Řešení těchto dvou úloh odevzdávejte ve formě souboru typu PDF přes výše uvedené webové rozhraní.

Řešení všech úloh můžete odevzdávat do 15. listopadu 2013. Opravená řešení a seznam postupujících do krajského kola najdete na webových stránkách olympiády na adrese <http://mo.mff.cuni.cz/>, kde jsou také k dispozici další informace o kategorii P.

**Upozornění:** V časopise *Rozhledy matematicko-fyzikální* č. 2, roč. 88 (2013) byla publikována starší verze zadání domácího kola. Platná verze, jak ji najdete v tomto letáku, se liší následovně:

- ▷ P-I-1: Ve čtvrté sadě testovacích dat platí omezení velikosti  $n \leq 1500$  (namísto původního  $n \leq 5000$ ).
- ▷ P-I-3: Síť představující plán Manhattanu je čtvercová (namísto původní obdélníkové).

### P-I-1 Taková zima

„Teda, taková zima jako dnes byla naposledy na Štědrý den...“ pozvdychl si nad pivem děda Bonifác. „To nic není, včera byla taková zima, že podobná byla naposledy druhého prosince!“ chtěl ho trumfnout děda Ignác. Ale na Bonifáce neměl. „Zapomínáš na zimu, jaká byla pátého ledna, ta byla sice menší než včera, ale větší než druhého prosince!“

Ignác celou noc nespal, vzpomínal na teploty a snažil se přijít na výrok, který už Bonifác nedokáže vyvrátit ani překonat. Chtěl by říci větu následujícího typu: „před  $x$  dny bylo tak teplo, že podobně předtím bylo naposledy před  $y$  dny“.

Nechť  $T[x]$  a  $T[y]$  jsou teploty v uvažovaných dvou dnech. Aby Bonifác nemohl vyvrátit Ignácův výrok, musí platit, že v žádném dni mezi  $x$  a  $y$  nebyla teplota v rozmezí od  $T[x]$  do  $T[y]$ , včetně těchto dvou hodnot. Navíc, aby byl Ignácův výrok co nejpůsobivější, musí být rozdíl  $y - x$  (tedy počet dní, které uplynuly mezi uvedenými daty) co možná největší.

**Soutěžní úloha.** Je dáno pole  $T[0 \dots n-1]$ , kde  $T[i]$  je průměrná teplota před  $i$  dny. Naleznete indexy  $x < y$  takové, že platí:

- ▷ pro každé  $i$  takové, že  $x < i < y$ , je buď  $T[i] < \min(T[x], T[y])$  nebo  $T[i] > \max(T[x], T[y])$ ,
- ▷ rozdíl  $y - x$  je největší možný,

▷ pokud existuje více takových dvojic  $(x, y)$ , chceme nalézt tu z nich, v níž je hodnota  $y$  největší.

*Formát vstupu:* Program čte vstupní data ze standardního vstupu. První řádek obsahuje jedno přirozené číslo udávající počet dní  $n$ . Na druhém řádku je  $n$  mezerami oddělených celých čísel  $T[0]$  až  $T[n - 1]$ . Vždy bude platit  $n \geq 2$  a pro všechna  $i$  bude  $-10^9 \leq T[i] \leq 10^9$ .

*Formát výstupu:* Program vypíše na standardní výstup jediný řádek. Na něm se nacházejí hledaná dvě celá čísla  $x$  a  $y$  oddělená mezerou.

### Hodnocení

Vaše řešení budou testována na deseti sadách testovacích vstupních dat. Za každou z nich můžete získat 1 bod. Maximální hodnotu  $n$  v jednotlivých sadách vstupů udává následující tabulka.

sada	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
max. $n$	10	20	100	1500	6000	7000	50 000	65 000	85 000	100 000

Navíc bude platit: V sadách číslo 1, 4 a 7 obsahuje pole  $T$  právě jednou každou z hodnot od 1 do  $n$ . V sadách číslo 2, 5 a 8 obsahuje pole  $T$  pouze hodnoty od 1 do  $n$  (každou z nich libovolně-krát).

### Příklady

<i>Vstup:</i>	<i>Výstup:</i>
8	1 6
-5 10 32 17 24 -12 13 19	

Před  $x = 1$  dnem byla teplota 10 stupňů, před  $y = 6$  dny to bylo 13 stupňů. Žádná z teplot mezi nimi (32, 17, 24 ani -12) neleží v intervalu  $\langle 10, 13 \rangle$ , takže tento výrok Bonifác skutečně nemůže vyvrátit.

Žádný delší interval nevyhovuje – například nemůže být  $(x, y) = (1, 7)$ , neboť  $T[3] = 17$  leží mezi  $T[1] = 10$  a  $T[7] = 19$ . Všimněte si, že dvojice  $(x, y) = (0, 5)$  sice také vyhovuje a má stejnou délku, ale námi vypsaná dvojice má větší hodnotu  $y$ , jak je požadováno v zadání úlohy.

<i>Vstup:</i>	<i>Výstup:</i>
5	3 4
7 7 7 7 7	

Tady se nedá nic dělat, musíme zvolit  $y = x + 1$ . Následně vybereme největší možné  $y$ .



## P–I–2 Dva ploty

Mařenka jezdí za svou babičkou na vesnici. Babička má sad a v něm ty nejlepší ovocné stromy – hrušky máslovky. Jenže na hrušky začala chodit celá vesnice, proto když Mařenka přijede k babičce o podzimních prázdninách, po hruškách už není ani vidu, ani slechu.

Jeníček chce Mařence pomoci. Sehnal si nějaké kůly, latě, hřebíky a kladivo a chystá se kolem stromů postavit plot. Už se chtěl pustit do práce, když ho najednou napadlo: Co takhle postavit ploty dva? Nestačilo by na ně méně materiálu?

**Soutěžní úloha.** Je dáno  $n \geq 3$  bodů v rovině. Hledáme jeden nebo dva mnohoúhelníky takové, aby platilo:

- ▷ každý z  $n$  daných bodů leží uvnitř nebo na obvodě aspoň jednoho z mnohoúhelníků,
- ▷ každý vrchol každého mnohoúhelníka je umístěn v některém z daných bodů,
- ▷ žádný mnohoúhelník nemá nulový obsah.

Vypočtete nejmenší možnou hodnotu celkového obvodu nalezených mnohoúhelníků.

*Popis vstupu:* Program čte vstupní data ze standardního vstupu. První řádek vstupu obsahuje jedno přirozené číslo  $n$ , kde  $n \geq 3$ . Na každém z následujících  $n$  řádků vstupu jsou dvě celá čísla  $x_i, y_i$ , která určují souřadnice jednoho z bodů. Platí  $|x_i| \leq 10^8, |y_i| \leq 10^8$ .

Pro zadané body vždy platí, že neleží všechny na jedné přímce.

*Popis výstupu:* Program vypíše na standardní výstup jediný řádek a na něm jedno reálné číslo – nejmenší celkovou délku plotu. Vypíšte alespoň 6 míst za desetinnou tečkou. Odpovědi s chybou menší než  $10^{-6}$  budou považovány za správné.

### Hodnocení

Vaše řešení budou testována na deseti sadách testovacích vstupních dat. Za každou z nich můžete získat 1 bod. Maximální hodnotu  $n$  v jednotlivých sadách vstupů udává následující tabulka:

sada	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
max. $n$	3	5	8	18	18	50	50	200	300	300

Navíc bude platit: V sadách číslo 1, 2, 4, 6 a 9 žádné tři body neleží na jedné přímce. V sadách číslo 1, 6 a 8 je optimálním řešením postavit jeden plot.

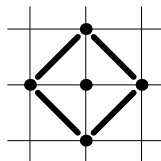
## Příklady

Vstup:

```
5
0 1
0 -1
1 0
-1 0
0 0
```

Výstup:

5.65685425



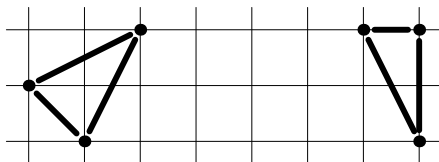
Vyplatí se postavit čtvercový plot. Jeho přesná délka obvodu je  $4\sqrt{2}$ . Za správné považujeme odpovědi z rozsahu přibližně  $\langle 5.6568486, 5.6568599 \rangle$ .

Vstup:

```
6
1 0
7 0
6 2
0 1
2 2
7 2
```

Výstup:

11.12241749487



## P-I-3 Kavárny

Když se nedávno David stěhoval do New Yorku, potřeboval si najít někde na Manhattanu ubytování. Někteří lidé hledají ubytování blízko svého místa zaměstnání, jiní chtějí raději bydlet v pěkném prostředí. Davidova priorita byla jasná: *káva*. Má v úmyslu pravidelně navštěvovat alespoň  $k$  kaváren v okolí svého bytu.

Pro jednoduchost si Manhattan představme jako čtvercovou síť ulic, po níž se lze pohybovat pouze čtyřmi základními směry. V některých mřížových bodech (tzn. na některých křižovatkách) jsou kavárny – v každém bodě nejvýše jedna.

**Soutěžní úloha.** Vstupem programu je číslo  $k$  a mapa Manhattanu. Pro každou křižovatku spočítejte nejmenší  $d$ , pro něž platí: kdyby David bydlel na této křižovatce a byl ochoten ujít vzdálenost  $d$ , měl by na výběr alespoň  $k$  kaváren, do nichž se může dostat. Vzájemné vzdálenosti sousedních křižovatek považujeme za jednotkové.

*Formát vstupu:* Na prvním řádku vstupu je celé číslo  $k$ . Na druhém řádku je rozměr  $n$  čtvercové sítě představující Manhattan: tvoří ho  $n$  vodorovných a stejný počet svislých ulic. Máme tedy přesně  $n^2$  křižovatek.

Zbytek vstupu tvoří  $n$  řádků, na každém z nich je  $n$  čísel: 1 představuje křižovatku s kavárnou, 0 křižovatku bez kavárny. Celkem je v Manhattanu alespoň  $k$  kaváren.

*Formát výstupu:* Výstupem programu bude  $r$  řádků a na každém z nich  $s$  čísel. Toto číslo pro každou křížovatku určuje vzdálenost  $d$  takovou, že do vzdálenosti  $d$  včetně od dotyčné křížovatky leží alespoň  $k$  kaváren.

### *Hodnocení*

Plných 10 bodů získáte za řešení s asymptoticky optimální časovou složitostí. Za pomalejší správné řešení můžete dostat 4 až 8 bodů podle konkrétní časové složitosti.

Pokud úlohu neumíte vyřešit obecně, můžete dostat až 3 body za vyřešení speciálního případu  $k = 1$ .

### *Příklady*

<i>Vstup:</i>	<i>Výstup:</i>
1	2 3 2 1
4	1 2 1 0
0 0 0 0	0 1 2 1
0 0 0 1	0 1 2 2
1 0 0 0	
1 0 0 0	

*Pro  $k = 1$  hledáme vzdálenost do nejbližší kavárny.*

<i>Vstup:</i>	<i>Výstup:</i>
3	3 3 4 3 4
5	2 2 3 2 3
1 0 0 0 0	2 3 2 1 2
0 0 0 1 0	3 2 2 2 2
1 0 0 0 1	3 3 3 3 2
1 0 0 1 0	
0 0 0 1 0	

## **P–I–4 Mimozemské počítače**

*K této úloze se vztahuje studijní text uvedený na následujících stránkách. Doporučujeme nejprve prostudovat studijní text a až potom se vrátit k samotným soutěžním úlohám.*

V této úloze nezáleží na časové složitosti vašich algoritmů – musí ale být polynomiální. Jednotlivé podúlohy spolu nesouvisí, můžete je řešit v libovolném pořadí.

### **Soutěžní úloha.**

a) (*3 body*) Mimozemšťané nám dodali sálový KSP, který rozhoduje problém existence hamiltonovské kružnice v daném neorientovaném grafu. Tento KSP má tedy funkci `kruznice(n, E)`, která dostává jako parametry počet  $n$  vrcholů grafu a seznam  $E$  jeho hran (každá hrana je dvojice čísel

od 0 do  $n - 1$ ). Pokud v daném grafu existuje hamiltonovská kružnice, KSP rozsvítí zelené světlo, jinak rozsvítí světlo červené.

Na vstupu dostanete neorientovaný graf  $G$ . Napište program s polynomiální časovou složitostí, který rozsvítí zelené nebo červené světlo podle toho, zda  $G$  obsahuje alespoň jednu hamiltonovskou cestu.

b) (*3 body*) Mimoszemšťané nám dodali sálový KSP, který rozhoduje problém existence alespoň jedné hamiltonovské cesty v daném neorientovaném grafu.

Tento KSP má tedy funkci `cesta(n,E)`, která dostává jako parametry počet  $n$  vrcholů grafu a seznam  $E$  jeho hran (každá hrana je dvojice čísel od 0 do  $n - 1$ ). Pokud v daném grafu pro některou dvojici vrcholů  $u$  a  $v$  existuje hamiltonovská cesta z  $u$  do  $v$ , KSP rozsvítí zelené světlo, jinak rozsvítí světlo červené.

Na vstupu dostanete neorientovaný graf  $G$ . Napište program s polynomiální časovou složitostí, který rozsvítí zelené nebo červené světlo podle toho, zda  $G$  obsahuje alespoň jednu hamiltonovskou kružnici.

c) (*4 body*) Mimoszemšťané nám dodali kufříkový KSP, který rozhoduje problém existence 3-obarvení v zadaném grafu.

Tento KSP má tedy funkci `je_3_obarvitelny(n,E)`, která dostává jako parametry počet  $n$  vrcholů grafu a seznam  $E$  jeho hran (každá hrana je dvojice čísel od 0 do  $n - 1$ ). Na výstupu funkce vrací `True`, jestliže je možné tento graf obarvit třemi barvami, a `False`, jestliže se takto obarvit nedá. Tuto funkci můžeme v našem programu volat libovolně-krát pro jakékoliv grafy.

Na vstupu dostanete neorientovaný graf  $G$ , který je možné obarvit třemi barvami. Napište program s polynomiální časovou složitostí, který jedno takové obarvení najde.

### *Programovací jazyky*

Ve svých řešeních můžete používat libovolný strukturovaný programovací jazyk. Vhodně si zvolte potřebné datové struktury. Například v Pascalu by funkce z podúlohy a) mohla vypadat následovně:

```
type hrana = array[0..1] of longint;  
procedure kruznice(n: longint; m: longint; E: array of hrana);
```

V jazycích C a C++ můžeme použít pole:

```
void kruznice(int n, int m, int E[][2]);
```

a v C++ třeba také vektor dvojic:

```
void kruznice(int n, vector< pair<int,int> > E);
```

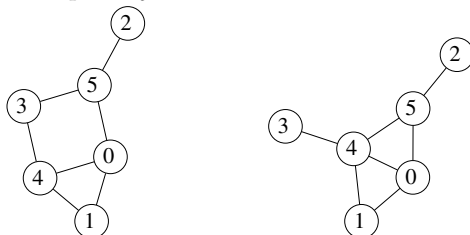
## Studijní text

Studijní text uvedený na dalších stranách odkazuje na několik problémů jako například „existence hamiltonovské kružnice“. Seznámíme se proto nejprve se stručnou definicí těchto problémů.

Neorientovaný graf je uspořádaná dvojice  $(V, E)$ , kde  $V$  je konečná množina objektů zvaných *vrcholy* grafu a  $E$  je konečná množina neuspořádaných dvojic vrcholů; její prvky nazýváme *hrany* grafu. Graf si můžeme představit jako silniční síť:  $V$  je množina měst a  $E$  je množina dvojic měst spojených silnicemi. Počet vrcholů budeme značit  $n$ , počet hran označíme  $m$ . Jednotlivé vrcholy budeme číslovat od 0 do  $n - 1$ .

### Problém: Hamiltonovská cesta z $u$ do $v$

Je dán neorientovaný graf  $G$  a jeho dva různé vrcholy  $u$  a  $v$ . Existuje v grafu  $G$  cesta, která začíná ve vrcholu  $u$ , končí ve vrcholu  $v$  a navštíví každý vrchol grafu  $G$  právě jednou?

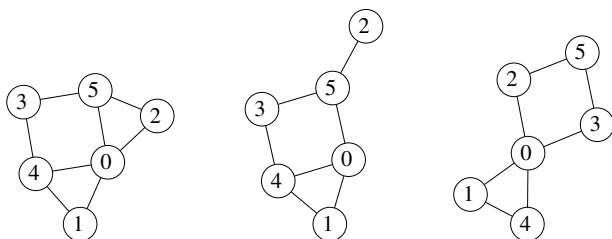


Graf vlevo obsahuje hamiltonovskou cestu z 1 do 2: můžeme jít postupně přes vrcholy 1, 0, 4, 3, 5 a 2.

Graf vpravo hamiltonovskou cestu z 1 do 2 neobsahuje: když chceme navštívit vrchol 3, půjdeme dvakrát přes vrchol 4.

### Problém: Hamiltonovská kružnice

Je dán neorientovaný graf  $G$  s  $n \geq 3$  vrcholy. Existuje v grafu  $G$  kružnice, která navštíví každý vrchol grafu  $G$  právě jednou?

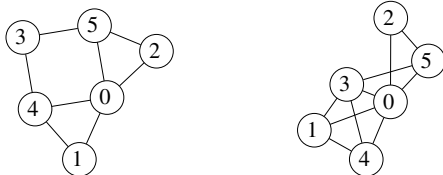


Graf vlevo obsahuje hamiltonovskou kružnici: začneme třeba v 1 a postupně jdeme do 0, 2, 5, 3, 4 a zpět do 1.

Graf uprostřed ani graf vpravo hamiltonovskou kružnici neobsahují.

### Problém: Barvení grafu $k$ barvami

Je dán neorientovaný graf  $G$ . Každému vrcholu grafu  $G$  chceme přiřadit jednu z  $k$  možných barev (pro jednoduchost označených čísly od 0 do  $k - 1$ ). Přitom musíme dodržet pravidlo, že žádná hrana nebude spojovat dva vrcholy téže barvy.



Pro graf vlevo a  $k = 2$  obarvení neexistuje. Například vrcholy 0, 1 a 4 musí zjevně mít navzájem různé barvy.

Pro graf vlevo a  $k = 3$  můžeme vrcholům 1, 2, 3 přiřadit barvu 0, vrcholům 4 a 5 barvu 1 a vrcholu 0 barvu 2.

Pro graf vpravo a  $k = 3$  žádné přípustné obarvení vrcholů neexistuje.

### Problém: $k$ -partitnost posloupnosti

Je dána posloupnost  $n$  kladných celých čísel. Je možné rozdělit tato čísla do  $k$  disjunktních skupin tak, aby každá ze skupin měla stejný součet?

- ▷ Pro posloupnost (3, 1, 4, 1, 5, 8) a  $k = 2$  odpověď zní ANO, jedním vyhovujícím rozdělením je  $3 + 8$  a  $1 + 4 + 1 + 5$ .
- ▷ Pro posloupnost (3, 1, 4, 1, 5, 9) a  $k = 2$  odpověď zní NE.
- ▷ Pro posloupnost (3, 1, 4, 1, 5, 1) a  $k = 3$  odpověď zní ANO, jedním vyhovujícím rozdělením je  $3 + 1 + 1$ ,  $1 + 4$  a  $5$ .
- ▷ Pro posloupnost (2, 2, 2, 2, 2, 12) a  $k = 3$  odpověď zní NE.

### KSP – konkrétní semiorganické počítače

V tomto studijním textu používáme v ukázkových programech programovací jazyk Python. Na webu olympiády najdete později doplněnou verzi s programovými ukázkami v jazycích C++ a Pascal.

Píše se rok 2113. Naši Zemi před několika lety kontaktovala vyspělá mimozemská rasa z planety Žbluňk. Mimoszemšťané nás zásobují svými konkrétními semiorganickými počítači (KSP), které umí řešit různé konkrétní výpočetní problémy. Naším cílem je integrovat tyto KSP do normálních počítačů a přinutit je tak řešit naše problémy.

Mimoszemským počítačům ale vůbec nerozumíme, všechny snahy o jejich rozebrání byly neúspěšné. Můžeme je využít jediným způsobem – zadat jim vstupní data a počkat na výsledek. Zajímavé je, že u KSP nezáleží na velikosti vstupních dat ani na konkrétním problému, který daný KSP

řeší. Když libovolný KSP spustíme s libovolnými vstupními daty, výsledek dostaneme vždy přesně za 47 setin sekundy. (Při odhadování časové složitosti programů toto považujeme za konstantu.)

### *Kufříkový KSP*

Mimozemšťané nám dodávají dva druhy KSP: *kufříkové* a *sálové*.

Kufříkový KSP má tvar kufříku se dvěma porty. Do jednoho připojíme kabel se vstupem, do druhého naopak kabel, po němž nám KSP pošle svůj výstup. Kufříkový KSP tedy můžeme použít v našem programu libovolně mnohokrát s různými vstupními hodnotami.

*Příklad.* Mimozemšťané nám dodali kufříkový KSP, který rozhoduje problém existence hamiltonovské cesty z  $u$  do  $v$ . Tento KSP počítá funkci  $\text{cesta}(n, E, u, v)$ , která dostává jako parametry počet  $n$  vrcholů grafu, seznam  $E$  jeho hran a dvě čísla vrcholů  $u$  a  $v$ . Parametr  $E$  je seznam  $m$  dvojic čísel, každé z rozsahu od 0 do  $n - 1$ . Na výstupu tato funkce vrací **True** nebo **False** podle toho, zda zadaný graf obsahuje příslušnou hamiltonovskou cestu.

Naším úkolem je napsat program, který bude v polynomiálním čase řešit problém existence hamiltonovské kružnice. Na vstupu dostaneme neorientovaný graf s  $n \geq 3$  vrcholy a máme zjistit, zda obsahuje hamiltonovskou kružnici.

### *Analýza zadání*

1. Program na vstupu dostane  $n$  (počet vrcholů grafu) a  $E$  (seznam hran grafu).
2. Vykoná nějaké výpočty, při nichž může libovolně používat funkci  $\text{cesta}$ .
3. Vrátil na výstupu **True** nebo **False** podle toho, zda vstupní graf obsahuje hamiltonovskou kružnici.

### *Řešení*

```
def kruznice(n,E):
    for (x,y) in E:
        # pro každou hranu (x,y) v seznamu hran E:
        newE = [ (u,v) for (u,v) in E if (u,v) != (x,y) ]
        # NewE obsahuje všechny hrany kromě (x,y)
        if cesta(n,newE,x,y): return True
    return False
```

Postupně si pro každou hranu  $(x, y)$  zadaného grafu položíme otázku: „Existuje hamiltonovská kružnice procházející hranou  $(x, y)$ ?“ Kdy taková kružnice existuje? Právě tehdy, když ve zbytku grafu existuje hamiltonovská cesta z  $x$  do  $y$ . Vytvoříme si tedy nový seznam hran  $\text{newE}$ , do kterého vložíme všechny hrany kromě  $(x, y)$ , a na takto upravený graf zavoláme funkci  $\text{cesta}$  našeho kufříkového KSP.

Jestliže v původním grafu nějaká hamiltonovská kružnice existuje, náš program ji najde a vrátí odpověď `True`, jakmile vyzkoušíme některou z hran tvořících kružnici jako  $(x, y)$ . Naopak, jestliže náš program odpoví `True`, pak v původním grafu existuje hamiltonovská cesta z nějakého vrcholu  $x$  do nějakého vrcholu  $y$ . Tato cesta společně s hranou  $(x, y)$  tvoří hledanou kružnici. Náš program tedy skutečně dělá to, co má.

Časová složitost popsaného programu je  $\Theta(m^2)$ , kde  $m$  je počet hran zadaného grafu. Protože v neorientovaném grafu platí  $m \leq n(n-1)/2$ , můžeme naši časovou složitost shora odhadnout jako  $\mathcal{O}(n^4)$ .

### Poznámka

Existuje i efektivnější řešení. Stačí si uvědomit, že před hledáním hamiltonovské cesty z  $x$  do  $y$  vůbec nemusíme odstraňovat hranu  $(x, y)$  z grafu. Hamiltonovská cesta z  $x$  do  $y$  v grafu s  $n \geq 3$  vrcholy ji stejně nemůže obsahovat. Stačí tedy pro každou hranu  $(x, y)$  zjistit, zda platí `cesta(n, E, x, y)`.

### Sálový KSP

Sálový KSP je obrovský a jeho jediným výstupem jsou dvě světla – červené a zelené. S tímto výstupem dále nepracujeme.

*Příklad.* Mimozemšťané nám dodali sálový KSP, který rozhoduje problémem 3-partitnosti. Tento KSP má funkci `tri_partitnost(X)`, která rozsvítí zelené nebo červené světlo podle toho, zda posloupnost  $X$  je 3-partitní – tedy zda se její prvky dají rozdělit do *tří* skupin se shodným součtem.

Na vstupu dostanete posloupnost kladných celých čísel  $A$ . Napište program s polynomiální časovou složitostí, který rozsvítí zelené nebo červené světlo podle toho, zda je posloupnost  $A$  2-partitní (tzn. zda můžeme prvky posloupnosti  $A$  rozdělit do *dvou* skupin se shodným součtem).

### Analýza zadání

1. Program na vstupu dostane posloupnost čísel  $A$ .
2. Vykoná nějaké výpočty a vytvoří nějakou novou posloupnost čísel  $X$ .
3. Na konci (každé možné větve) výpočtu jednou zavolá funkci `tri_partitnost(X)`, která rozsvítí správné světlo.

### Řešení

```
def dva_partitnost(A):
    s~ = sum(A)
    if s%2 == 0:
        X = A~ + [ s//2 ]
    else:
        X = [1]
    # která určitě není 3-partitní
    tri_partitnost(X)
```



Nechť jsme dostali vstupní posloupnost  $A = (a_1, \dots, a_n)$ . Spočítáme si její součet  $s$ .

Je-li  $s$  sudé, přidáme na konec vstupní posloupnosti ještě jeden prvek s hodnotou  $s/2$ . Takto upravenou posloupnost pošleme do KSP. Ten nám odpoví, zda je tato posloupnost 3-partitní. Jenže upravená posloupnost je 3-partitní právě tehdy, když byla původní posloupnost 2-partitní. KSP tedy za nás právě vyřešil zadanou úlohu.

Proč platí výše uvedená ekvivalence? V nové posloupnosti  $X$  je součet všech prvků roven  $3s/2$ . Jestliže je tedy  $X$  3-partitní, pak každá ze skupin, na něž  $X$  rozdělíme, má součet rovný přesně  $s/2$ . Potom ale nutně jednu z těchto tří skupin tvoří samotný přidaný prvek s hodnotou  $s/2$ . Naše nová posloupnost je proto 3-partitní právě tehdy, když je možné ostatní prvky rozdělit do dvou skupin se stejným součtem tzn. právě tehdy, když je původní posloupnost  $A$  2-partitní.

Je-li  $s$  liché, víme rovnou, že musíme odpovědět NE. Do KSP proto chceme poslat libovolný vstup, pro který dá KSP zápornou odpověď. Takovým vstupem je třeba  $X = (1)$  nebo  $X = (1, 1, 2)$ .

Časová složitost tohoto programu je lineární vzhledem k délce posloupnosti  $X$ .