Návody k domácí části I. kola kategorie A

1. *Je dáno přirozené číslo n. Čtverec o straně délky n je rozdělen na n^2 jednotkových čtverečků. Za vzdálenost dvou čtverečků považujeme vzdálenost jejich středů. Určete počet dvojic čtverečků, jejichž vzdálenost je 5.*

Návodné a doplňující úlohy:

1. Kolik je ve čtverci $n \times n$ dvojic čtverečků, jejichž vzdálenost je 2? [Pokud $n \geqq 2$, je jich v každém řádku $n-2$ a stejně i v každém sloupci. Celkem jich je $2n(n-2)$.]
2. Kolik je ve čtverci $n \times n$ dvojic čtverečků, jejichž vzdálenost je $\sqrt{5}$? [Pro $n \geqq 2$ jich je $4(n-1)(n-2)$.]

D1. Určete počet dvojic (a, b) přirozených čísel $(1 \leqq a < b \leqq 86)$, pro které je součin ab dělitelný třemi. [51–C–II–1]

D2. Čtvercová tabulka je rozdělena na 16×16 políček. Kobylka se po ní pohybuje dvěma směry: vpravo nebo dolů, přičemž střídá skoky o dvě a o tři políčka (tj. žádné dva po sobě jdoucí skoky nejsou stejně dlouhé). Začíná skokem délky dva z levého horního políčka. Kolika různými cestami se může kobylka dostat na pravé dolní políčko? (Pod cestou máme na mysli posloupnost políček, na které kobylka doskočí.) [62–C–I–1]

2. *Je dán trojúhelník ABC, v němž je BC nejkratší stranou. Její střed označme M. Na stranách AB a AC určíme postupně body X a Y tak, aby platilo $|BX| = |BC| = |CY|$. Průsečík přímek CX a BY označme Z. Ukažte, že přímka ZM prochází středem kružnice připsané straně BC daného trojúhelníku.*

Návodné a doplňující úlohy:

1. Označme S, T, U postupně středy kružnic připsaných stranám BC, CA, AB daného trojúhelníku ABC. Dokažte, že trojúhelníky SBC, ATC, ABU jsou podobné. [Trojúhelníky jsou podobné podle věty *uu*; velikosti jejich vnitřních úhlů jsou $90° - \frac{1}{2}\alpha$, $90° - \frac{1}{2}\beta$, $90° - \frac{1}{2}\gamma$.]
2. V daném čtyřúhelníku $ABCD$ označme postupně K, L, M, N středy stran AB, BC, CD, DA. Dokažte, že střed úsečky KM leží na přímce LN. [Úsečky KL a NM jsou střední příčky trojúhelníků ACB a ACD, jsou tedy rovnoběžné s AC, tudíž i navzájem. Podobně $LM \parallel KN$. Takže $KLMN$ je rovnoběžník a středy úseček KM, LN jsou totožné.]

D1. V rovnoramenném lichoběžníku $ABCD$ platí

$$|BC| = |CD| = |DA| \quad \text{a} \quad |\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle ABC| = 36°.$$

Na základně AB je dán bod K tak, že $|AK| = |AD|$. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům AKD a KBC mají vnější dotyk. [53–B–I–2]

D2. Je dána kružnice k se středem S. Kružnice l má větší poloměr než kružnice k, prochází jejím středem a protíná ji v bodech M a N. Přímka, která prochází bodem N a je rovnoběžná s přímkou MS, vytíná na kružnicích tětivy NP a NQ. Dokažte, že trojúhelník MPQ je rovnoramenný. [59–C–II–3]

3. *Najděte všechna celá čísla $k \geqq 2$, pro která existuje k-prvková množina* M *celých kladných čísel taková, že součin všech čísel z* M *je dělitelný součtem libovolných dvou (různých) čísel z* M.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Dokažte, že pokud pro přirozená čísla a, b, c, d platí $a \mid c$ a $b \mid d$, pak $ab \mid cd$. [Z předpokladů vyplývá, že zlomky c/a, d/b jsou celá čísla, takže i jejich součin cd/ab je celé číslo.]
2. Dokažte, že pokud jsou přirozená čísla a, b nesoudělná, pak $a + b \nmid ab$. [Pokud $\mathrm{nsd}(a, b) = 1$, pak $\mathrm{nsd}(a + b, a) = \mathrm{nsd}(a + b - a, a) = \mathrm{nsd}(a, b) = 1$. Podobně $\mathrm{nsd}(a + b, b) = 1$. Odtud $\mathrm{nsd}(a + b, ab) = 1$, takže zlomek $ab/(a + b)$ je v základním tvaru, a protože $a + b > 1$, není celým číslem.]
3. Dokažte, že žádná tříprvková množina vyhovující zadání neobsahuje číslo 1. [Sporem: nechť množina $\{1, a, b\}$ vyhovuje. Pak $a + 1 \mid ab$, a jelikož $\mathrm{nsd}(a + 1, a) = 1$, nutně $a + 1 \mid b$, čili $a < b$. Analogicky $b < a$, čímž dostáváme spor.]
4. Dokažte, že pro každé přirozené číslo k existuje k po sobě jdoucích přirozených čísel, mezi nimiž není žádné prvočíslo. [Vyhovuje např. k-tice $(k + 1)! + 2, (k + 1)! + 3, \ldots, (k + 1)! + (k + 1)$.]

D1. Dokažte, že existuje rostoucí posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ přirozených čísel taková, že pro každé přirozené číslo $k \geqq 2$ posloupnost $(k + a_n)_{n=1}^{\infty}$ obsahuje pouze konečně mnoho prvočísel. Rozhodněte, zda existuje rostoucí posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ přirozených čísel taková, že pro každé celé číslo $k \geqq 0$ posloupnost $(k + a_n)_{n=1}^{\infty}$ obsahuje pouze konečně mnoho prvočísel. [46–A–III–4]

D2. Dokažte matematickou indukcí pro $k \geqq 4$ nerovnost $2^{k-1} > 2k - 1$.

D3. Ukažte, že pro každé celé $k \geqq 2$ lze vybrat k různých přirozených čísel tak, aby jejich součin byl dělitelný každým číslem, které je součtem několika z vybraných čísel (ne nutně dvou jako v soutěžní úloze). [Libovolně vybranou k-tici čísel $a_1, a_2, \ldots, a_k$ zaměňte za k-tici $Na_1, Na_2, \ldots, Na_k$, kde N je společný násobek všech $2^k - k - 1$ součtů $a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots + a_{i_r}$ $(2 \leqq r \leqq k)$.]

4. *Předpokládejme, že pro reálná čísla x, y, z platí*

$$15(x + y + z) = 12(xy + yz + zx) = 10(x^2 + y^2 + z^2)$$

a že alespoň jedno z nich je různé od nuly.

a) Dokažte rovnost $x + y + z = 4$.

b) Najděte nejmenší interval $\langle a, b\rangle$, v němž leží všechna tři čísla z libovolné trojice (x, y, z) vyhovující předpokladům úlohy.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Rovnice $x^3 - 5x^2 + 2x + 3 = 0$ má tři reálné kořeny. Jaký je součet jejich druhých mocnin? [Pokud a, b, c jsou kořeny dané rovnice, platí podle Viètových vztahů $a + b + c = 5$, $ab + bc + ca = 2$, a tedy $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = 5^2 - 2 \cdot 2 = 21$.]
2. Součin dvou reálných čísel je dvojnásobkem jejich součtu. Jaký může být jejich součet? [Pokud $a + b = p$ a $ab = 2p$, po vyjádření $b = pa$ a dosazení do druhé rovnice dostaneme $a^2 - ap + 2p = 0$, což je kvadratická rovnice s diskriminantem

p^2-8p. Ten je nezáporný (existuje tudíž reálné řešení), právě když $p \in (-\infty, 0\rangle \cup$
$\cup \langle 8, \infty)$.]

D1. Dokažte, že pokud pro reálná čísla a, b, c platí $a + b + c = 1$, je

$$2(a^2 + b^2 + c^2) + ab + bc + ca \geqq 1.$$

[46–A–S–3]

D2. Určete všechny trojice reálných čísel a, b, c, které splňují podmínky

$$a^2 + b^2 + c^2 = 26, \quad a + b = 5 \quad \text{a} \quad b + c \geqq 7.$$

[62–A–S–3]

D3. Najděte všechny možné hodnoty součtu $x + y$, jestliže reálná čísla x, y splňují rovnost $x^3 + y^3 = 3xy$. [48–B–I–6]

D4. Předpokládejme, že pro kladná reálná čísla a, b, c, d platí

$$ab + cd = ac + bd = 4 \qquad \text{a} \qquad ad + bc = 5.$$

Najděte nejmenší možnou hodnotu součtu $a+b+c+d$ a zjistěte, které vyhovující čtveřice a, b, c, d ji dosahují. [61–A–II–4]

D5. Předpokládejme, že reálná čísla x, y, z vyhovují soustavě rovnic

$$x + y + z = 12, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 54.$$

Dokažte, že pak platí následující tvrzení: a) Každé z čísel xy, yz, zx je alespoň 9, avšak nejvýše 25. b) Některé z čísel x, y, z je nejvýše 3 a jiné z nich je alespoň 5. [60–A–III–3]

5. *V daném trojúhelníku ABC označme D bod dotyku kružnice vepsané se stranou BC. Kružnice vepsaná trojúhelníku ABD se dotýká stran AB a BD v bodech K a L. Kružnice vepsaná trojúhelníku ADC se dotýká stran DC a AC v bodech M a N. Dokažte, že body K, L, M, N leží na jedné kružnici.*

Návodné a doplňující úlohy:

1. Nechť P je bod ležící ve vnější oblasti dané kružnice k. Tímto bodem vedeme tečny, které se kružnice k dotýkají postupně v bodech U, V. Dokažte, že $|PU| = |PV|$. [Vyplývá to ze souměrnosti podle přímky PS, kde S je střed kružnice k.]
2. Dokažte, že kružnice vepsaná trojúhelníku ABC se dotýká jeho stran v bodech D, E, F určených rovnostmi $|AE| = |AF| = s - a$, $|BF| = |BD| = s - b$, $|CD| = |CE| = s-c$, kde $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$. [Rovnosti $|AE| = |AF|$, $|BF| = |BD|$, $|CD| = |CE|$ vyplývají z předešlé návodné úkoly. Pokud délky těchto úseků označíme x, y, z, dostaneme soustavu $x + y = c$, $y + z = a$, $z + x = b$, jejíž řešením dostaneme vyjádření $x = \frac{1}{2}(b+c-a) = s-a$, $y = \frac{1}{2}(c+a-b) = s-b$, $z = \frac{1}{2}(a + b - c) = s - c$.]
3. Dokažte, že pokud se osy některých tří stran čtyřúhelníku protínají v jednom bodě, je tento čtyřúhelník tětivový. [Průsečík os tří stran je stejně vzdálen od všech čtyř vrcholů.]

4. Nechť D, E, F jsou body dotyku kružnice vepsané trojúhelníku ABC s jeho stranami. Dokažte, že trojúhelník DEF je ostroúhlý. [Velikosti úhlů trojúhelníku DEF jsou $90° - \frac{1}{2}\alpha$, $90° - \frac{1}{2}\beta$, $90° - \frac{1}{2}\gamma$, což jsou všechno ostré úhly.]

D1. Nechť K, L, M jsou po řadě vnitřní body stran BC, CA, AB daného trojúhelníku ABC takové, že kružnice vepsané dvojicím trojúhelníků ABK a CAK, BCL a ABL, CAM a BCM mají vnější dotyk. Pak platí

$$|BK| \cdot |CL| \cdot |AM| = |CK| \cdot |AL| \cdot |BM|.$$

Dokažte. [49–A–I–2]

D2. Na přímce a, na které leží strana BC trojúhelníku ABC, jsou dány body dotyku všech tří jemu připsaných kružnic (body B a C nejsou známy). Najděte na této přímce bod dotyku kružnice vepsané. [63–B–S–3]

6. *Nechť a, b jsou daná, navzájem nesoudělná přirozená čísla. Posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ přirozených čísel je sestavena tak, že pro každé $n > 1$ platí $x_n = ax_{n-1} + b$. Dokažte, že v libovolné takové posloupnosti každý člen x_n s indexem $n > 1$ dělí nekonečně mnoho jejích dalších členů. Platí toto tvrzení i pro $n = 1$?*

Návodné a doplňující úlohy:

1. Zopakujte si a dokažte následující tvrzení z teorie čísel:
   a) pokud $\mathrm{nsd}(a, b) = 1$ a $a \mid bc$, pak $a \mid c$;
   b) $\mathrm{nsd}(a, b) = \mathrm{nsd}(a - kb, b)$;
   c) pokud $\mathrm{nsd}(a, b) = 1$, pak $\mathrm{nsd}(a^m, b^n) = 1$.
2. Je dána k-prvková množina M, jejíž prvky jsou celá čísla. Dokažte, že existuje neprázdná podmnožina množiny M, součet jejíchž prvků je násobkem čísla k. [Nechť $\mathsf{M} = \{a_1, \ldots, a_k\}$. Pokud se mezi k čísly $a_1, a_1 + a_2, \ldots, a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ nachází násobek k, je tvrzení zřejmé. V opačném případě se mezi nimi nacházejí dvě čísla $a_1 + \ldots + a_i$, $a_1 + \ldots + a_j$, $i < j$, jež dávají při dělení číslem k stejný zbytek, takže jejich rozdíl je násobkem k, a přitom je to zároveň i součet prvků množiny $\{a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_j\}$.]