Návody k domácí části I. kola kategorie B

1. *V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic*

$$|x-5|+|y-9|=6,$$
$$|x^2-9|+|y^2-5|=52.$$

Návodné a doplňující úlohy:

1. Řešte rovnici $|4x-2|+|x-2|=6$. [Rovnice má dvě řešení $-\frac{2}{5}$ a 2.]
2. Nechť pro reálná čísla x a y platí $|x^2+4|+|y^2-65|=20$, potom $x\in\langle -4;4\rangle$ a $y\in\langle -9;-7\rangle\cup\langle 7;9\rangle$. Dokažte.
3. V oboru reálných čísel řešte rovnici $2^{|x+1|}-2^x=1+|2^x-1|$. [63–B–S–1]

D1. Určete všechna reálná čísla p, pro něž má rovnice $(x-1)^2=3|x|-px$ právě tři různá řešení v oboru reálných čísel. [52–B–II–3]

D2. Určete všechna reálná čísla s a t, pro která je grafem funkce

$$f(x)=\frac{x^2-4x+s}{t|x-1|+x+7}$$

lomená čára složená ze dvou polopřímek. [50–A–II–2]

D3. Pro která reálná čísla a, b je funkce $f(x)=a|x-1|+b(x-3)+|x-b|+x-1$ omezená? [49–B–S–1]

2. *Drak má n hlav, po jedné na každém z n krků uspořádaných do kruhu. Rytíř dokáže jedním úderem tít po k sousedních krcích a hlavy na nich setnout. Jestliže drakovi po úderu zbyde aspoň jedna hlava, může si nechat některou z chybějících hlav okamžitě dorůst. Dokažte, že když pro daná čísla n a k může rytíř draka zbavit všech hlav bez ohledu na to, jak mu dorůstají, svede to udělat nejvýše třemi údery.*

Návodné a doplňující úlohy:

1. Uvažujme situaci ze zadání úlohy 2. Nechť rytíř dokáže jedním úderem tít po 2 sousedních krcích.
   a) Pokud má drak 3 hlavy, potom je rytíř schopen zbavit draka všech hlav dvěma údery. Popište rytířovu strategii.
   b) Dokažte, že pokud má drak 4 hlavy, potom si drak může nechat dorůstat hlavy tak, že ho rytíř nikdy nezbaví všech hlav. Popište drakovu strategii.

   [Označme hlavy draka dokola čísly $1,2,\ldots$ a) Nechť rytíř prvním úderem setne hlavy 2 a 3. Drakovi zbývá hlava 1, proto si některou z useknutých hlav nechá dorůst. Ale každá z useknutých hlav sousedí s hlavou 1, a jakmile doroste, rytíř ji usekne spolu s hlavou 1 druhým úderem. b) Rytíř nemůže jedním úderem tít po krcích, na kterých jsou hlavy 2 a 4, současně však jedním úderem musí jednu z těchto dvou hlav setnout. Po každém úderu tedy drakovi zbyde buď hlava 2, nebo hlava 4 a drak si následně nechá druhou z těchto hlav dorůst.]

D1. Na každé stěně krychle je napsáno právě jedno celé číslo. V jednom kroku zvolíme libovolné dvě sousední stěny krychle a čísla na nich napsaná zvětšíme o 1. Určete nutnou a postačující podmínku pro očíslování stěn krychle na počátku, aby po konečném počtu vhodných kroků byla na všech stěnách krychle stejná čísla. [60–A–I–5]

3. *V trojúhelníku ABC označme U střed strany AB a V střed strany AC. V polorovině opačné k polorovině BCA uvažujme libovolný rovnoběžník $BCDE$. Označme X průsečík přímek UD a VE. Dokažte, že přímka AX dělí rovnoběžník $BCDE$ na dvě části téhož obsahu.*

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

1. Dokažte, že přímka dělí rovnoběžník na dvě části stejného obsahu, právě když prochází jeho průsečíkem úhlopříček (*středem rovnoběžníku*). [Rovnoběžník je středově souměrný, přímka procházející jeho středem ho tedy dělí na dvě shodné části. Naopak, nechť daná přímka dělí rovnoběžník na dvě části stejného obsahu. V případě, že prochází dvěma sousedními stranami, vytne trojúhelník, jehož obsah je nejvýše polovina obsahu čtyřúhelníku, rovnost nastane v případě úhlopříčky. Pokud přímka prochází protějšími stranami, vzniknou dva lichoběžníky se stejnou výškou, ty mají shodný obsah, právě když mají shodný součet základen.]
2. Zopakujte si základní vlastnosti těžnic a těžiště trojúhelníku.

D1. Lichoběžník $ABCD$ má základny AB a CD po řadě délek 18 cm a 6 cm. Pro bod E strany AB platí $2|AE| = |EB|$. Těžiště trojúhelníků ADE, CDE, BCE, jež označíme po řadě K, L, M, tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníku.
   a) Dokažte, že přímky KM a CM svírají pravý úhel.
   b) Vypočtěte délky ramen lichoběžníku $ABCD$.
   [60–C–II–4]

D2. Uvnitř rovnoběžníku $ABCD$ je dán bod X. Sestrojte přímku, která prochází bodem X a rozděluje daný rovnoběžník na dvě části, jejichž obsahy se navzájem liší co nejvíce. [61–A–III–4]

4. *Nechť m je přirozené číslo, které má 7 kladných dělitelů, a n je přirozené číslo, které má 9 kladných dělitelů. Kolik dělitelů může mít součin $m \cdot n$?*

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

1. Kolik kladných dělitelů mají čísla 24, 128 a 105? Kolik kladných dělitelů má součin každé dvojice těchto čísel? [Každé z čísel má 8 dělitelů, $24 \cdot 128$ má 22 dělitelů, $24 \cdot 105$ má 48 dělitelů, $128 \cdot 105$ má 64 dělitelů.]
2. Jaké jsou všechny možné rozklady čísla s 8 kladnými děliteli na součin prvočísel? [p_1^7, $p_1^3 p_2$, $p_1 p_2 p_3$.]
3. Určete nejmenší přirozené číslo s osmi kladnými děliteli. [Z výsledku předchozí úlohy plyne, že hledaným je číslo 24, nejmenší z čísel 2^7, $2^3 \cdot 3$ a $2 \cdot 3 \cdot 5$.]
4. Nechť $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_s^{a_s}$ je rozklad přirozeného čísla n na součin prvočísel. Dokažte, že potom má číslo n právě $\tau(n) = (a_1+1)(a_2+1)\dots(a_s+1)$ kladných dělitelů.

D1. Označme $\tau(k)$ počet všech kladných dělitelů přirozeného čísla k a nechť n je řešením rovnice $\tau(1{,}6n) = 1{,}6\tau(n)$. Určete hodnotu podílu $\tau(0{,}16n) : \tau(n)$. [48–A–I–4]

5. *Nechť S je střed přepony AB pravoúhlého trojúhelníku ABC, který není rovnoramenný. Označme D patu výšky z vrcholu C a R průsečík osy vnitřního úhlu při vrcholu C s přeponou AB. Určete velikosti vnitřních úhlů tohoto trojúhelníku, platí-li $|SR| = 2|DR|$.*

Návodné a doplňující úlohy:

1. Osa vnitřního úhlu trojúhelníku ABC při vrcholu C protíná stranu AB v bodě R. Dokažte rovnost poměrů $|AC| : |BC| = |AR| : |BR|$. [Označme v velikost výšky trojúhelníku ABC procházející bodem C. Bod R leží na ose úhlu ACB, jeho vzdálenost od stran AC a BC je tedy stejná, označme ji r. Dvěma způsoby vyjádříme obsah trojúhelníku ARC, platí $\frac{1}{2}|AR|v = \frac{1}{2}|AC|r$. Podobně vyjádříme i obsah trojúhelníku BRC, platí $\frac{1}{2}|BR|v = \frac{1}{2}|BC|r$. Vydělením obou těchto rovností dostaneme požadovaný vztah.]
2. Pomocí velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku vyjádřete velikosti úhlů, které svírají výšky trojúhelníku s jednotlivými stranami a mezi sebou navzájem.
3. Je dána kružnice k se středem S. Kružnice l má větší poloměr než kružnice k, prochází jejím středem a protíná ji v bodech M a N. Přímka, která prochází bodem N a je rovnoběžná s přímkou MS, vytíná na kružnicích tětivy NP a NQ. Dokažte, že trojúhelník MPQ je rovnoramenný. [59–C–II–3]
4. Pro vnitřní bod P strany AB ostroúhlého trojúhelníku ABC označme K a L paty kolmic z bodu P na přímky AC a BC. Sestrojte takový bod P, pro který přímka CP půlí úsečku KL. [58–B–S–1]
5. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník. Označme K a L paty výšek z vrcholů A a B, M střed strany AB a V průsečík výšek trojúhelníku ABC. Dokažte, že osa úhlu KML prochází středem úsečky VC. [54–B–II–3]

D1. Nechť V je průsečík výšek ostroúhlého trojúhelníku ABC. Přímka CV je společnou tečnou kružnic k a l, které se vně dotýkají v bodě V a přitom každá z nich prochází jedním z vrcholů A a B. Jejich průsečíky s vnitřky stran AC a BC označme P a Q. Dokažte, že polopřímka VC je osou úhlu PVQ a že body A, B, P, Q leží na jedné kružnici. [62–B–I–3]

D2. V rovině je dán rovnoběžník $ABCD$, jehož úhlopříčka BD je kolmá ke straně AD. Označme M ($M \neq A$) průsečík přímky AC s kružnicí o průměru AD. Dokažte, že osa úsečky BM prochází středem strany CD. [56–B–II–3]

D3. V libovolném ostroúhlém různostranném trojúhelníku ABC označme O, V a S po řadě střed kružnice opsané, průsečík výšek a střed kružnice vepsané. Dokažte, že osa úsečky OV prochází bodem S, právě když jeden vnitřní úhel trojúhelníku ABC má velikost $60°$. [59–A–I–4]

D4. Označme S střed kružnice vepsané danému trojúhelníku ABC a P, Q paty kolmic z vrcholu C k přímkám, na kterých leží osy vnitřních úhlů BAC a ABC. Dokažte, že přímky AB a PQ jsou rovnoběžné. [51–A–S–2]

6. *Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c platí*

$$\frac{1}{a^2-ab+b^2}+\frac{1}{b^2-bc+c^2}+\frac{1}{c^2-ca+a^2} \leqq \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

Určete, kdy nastane rovnost.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Dokažte nerovnost $a^2 - ab + b^2 > 0$ pro libovolná dvě reálná čísla a, b. [Nerovnost dostaneme jednoduchou úpravou na čtverec, nebo ukážeme že uvedený kvadratický trojčlen má v proměnné a záporný diskriminant.]

2. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla platí a, b platí nerovnosti

$$a^2+b^2 \geqq 2ab, \quad \frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqq 2, \quad a^3+b^3 \geqq a^2b+ab^2, \quad \frac{1}{a+b} \leqq \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\Big).$$

Kdy v nich nastane rovnost?

3. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c platí nerovnost

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \leqq \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Big).$$

[Podle předcházející úlohy platí $\frac{1}{a+b} \leqq \frac{1}{4}\big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\big)$. Podobně platí i $\frac{1}{b+c} \leqq \frac{1}{4}\big(\frac{1}{b}+ +\frac{1}{c}\big)$ a $\frac{1}{c+a} \leqq \frac{1}{4}\big(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\big)$. Sečtením těchto tří nerovností dostaneme požadovanou nerovnost, ve které nastane rovnost, právě když nastane rovnost ve všech užitých nerovnostech, tj. v případě $a=b=c$.]

4. Určete všechny dvojice $(x;y)$ reálných čísel, které vyhovují nerovnici

$$(x+y)\Big(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\Big) \geqq \Big(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\Big)^2.$$

[63–B–I–2]

5. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b platí

$$\sqrt{ab} \leqq \frac{2(a^2+3ab+b^2)}{5(a+b)} \leqq \frac{a+b}{2},$$

a pro každou z obou nerovnosti zjistěte, kdy přechází v rovnost. [59–C–I–5]

6. Dokažte, že pro libovolná kladná čísla a, b a c platí nerovnost

$$\Big(a+\frac{1}{b}\Big)+\Big(b+\frac{1}{c}\Big)+\Big(c+\frac{1}{a}\Big) \geqq 8.$$

Zjistěte, kdy nastane rovnost. [55–B–S–1]

D1. Dokažte, že pro libovolná kladná čísla a, b platí nerovnost

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}} \leqq \sqrt[3]{2(a+b)\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\Big)}.$$

[49–A–II–3]

D2. Dokažte, že pro každou trojici x, y, z kladných čísel platí nerovnost

$$\sqrt{xyz}\Big(\frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{z+x}\Big) \leqq \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}.$$

Zjistěte, kdy nastane rovnost. [47–B–I–3]

D3. Dokažte, že pro každou trojici x, y, z nezáporných čísel platí nerovnost

$$x(x-\sqrt{yz})+y(y-\sqrt{zx})+z(z-\sqrt{xy}) \geqq 0.$$

Zjistěte, kdy platí rovnost. [17–A–II–2]