ÚLOHY DOMÁCÍ ČÁSTI 1. KOLA 66. ROČNÍKU MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY PRO ŽÁKY STŘEDNÍCH ŠKOL (2016/2017)

Kategorie A

1. Najděte všechna prvočísla p, pro něž existuje přirozené číslo n takové, že $p^n + 1$ je třetí mocninou některého přirozeného čísla. (*Ján Mazák, Róbert Tóth*)

2. Máme n^2 prázdných krabic; každá z nich má čtvercové dno. Výška i šířka každé krabice je přirozené číslo z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Každé dvě krabice se liší alespoň v jednom z těchto dvou rozměrů. Jednu krabici je dovoleno vložit do druhé, má-li oba rozměry menší a alespoň jeden z rozměrů má alespoň o 2 menší. Takto můžeme vytvořit posloupnost krabic vložených navzájem do sebe (tj. první krabice je uvnitř druhé, druhá krabice je uvnitř třetí atd.). Každou takovou sadu uložíme na jinou poličku. Určete nejmenší možný počet poliček potřebný k uskladnění všech n^2 krabic.

(*Peter Novotný*)

3. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s výškami AK, BL, CM. Dokažte, že trojúhelník ABC je rovnoramenný, právě když platí rovnost

$$|AM| + |BK| + |CL| = |AL| + |BM| + |CK|.$$

(*Jaromír Šimša*)

4. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, které mají pro každé přirozené číslo m následující vlastnost: pokud označíme $d_1, d_2, \ldots, d_n$ všechny dělitele čísla m, platí

$$f(d_1) \cdot f(d_2) \cdot \ldots \cdot f(d_n) = m.$$

(*Pavel Calábek*)

5. Uvnitř základny AB rovnoramenného trojúhelníku ABC leží bod D. Zvolme bod E tak, aby $ADEC$ byl rovnoběžník. Na polopřímce opačné k ED leží bod F takový, že $|EB| = |EF|$. Dokažte, že délka tětivy, kterou vytíná přímka BE v kružnici opsané trojúhelníku ABF, je dvojnásobkem délky úsečky AC. (*Jan Kuchařík, Patrik Bak*)

6. Řešte v oboru reálných čísel soustavu rovnic

$$\begin{aligned} k - x^2 &= y, \\ k - y^2 &= z, \\ k - z^2 &= u, \\ k - u^2 &= x \end{aligned}$$

s reálným parametrem k z intervalu $\langle 0, 1\rangle$. (*Jaroslav Švrček*)

66. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY PRO ŽÁKY STŘEDNÍCH ŠKOL

Kategorie B

1. Každému vrcholu pravidelného 66úhelníku přiřadíme jedno z čísel 1 nebo -1. Ke každé úsečce spojující dva jeho vrcholy (straně nebo úhlopříčce) pak připíšeme součin čísel v jejích krajních bodech a všechna čísla u jednotlivých úseček sečteme. Určete nejmenší možnou a nejmenší nezápornou hodnotu takového součtu. (*Pavel Calábek*)

2. Určete všechny dvojice (a, b) reálných parametrů, pro něž má soustava rovnic

$$\begin{aligned} |x| + y &= a, \\ 2|y| - x &= b \end{aligned}$$

právě tři řešení v oboru reálných čísel, a pro každou z nich tato řešení určete. (*Jaroslav Švrček*)

3. Na kružnici k jsou zvoleny body A, B, C, D, E (v tomto pořadí) tak, že platí $|AB| = |CD| = |DE|$. Dokažte, že těžiště trojúhelníků ABD, ACD a BDE leží na kružnici soustředné s kružnicí k. (*Tomáš Jurík*)

4. Najděte všechna osmimístná čísla $*2*0*1*6$ se čtyřmi neznámými *lichými* číslicemi vyznačenými hvězdičkami, která jsou dělitelná číslem 2 016. (*Jaromír Šimša*)

5. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB. Označme D patu jeho výšky z vrcholu C a M, N průsečíky os úhlů ADC, BDC se stranami AC, BC. Dokažte, že platí

$$2|AM| \cdot |BN| = |MN|^2.$$

(*Jaroslav Švrček*)

6. Určete všechna reálná čísla r taková, že nerovnost $a^3 + ab + b^3 \geqq a^2 + b^2$ platí pro všechny dvojice reálných čísel a, b, která jsou větší nebo rovna r. (*Ján Mazák*)

66. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY PRO ŽÁKY STŘEDNÍCH ŠKOL

Kategorie C

1. Dokažte, že pro libovolné reálné číslo a platí nerovnost

$$a^2 + \frac{1}{a^2 - a + 1} \geqq a + 1.$$

Určete, kdy nastane rovnost. (*Jaroslav Švrček*)

2. Najděte největší přirozené číslo d, které má tu vlastnost, že pro libovolné přirozené číslo n je hodnota výrazu

$$V(n) = n^4 + 11n^2 - 12$$

dělitelná číslem d. (*Aleš Kobza*)

3. Pata výšky z vrcholu C v trojúhelníku ABC dělí stranu AB v poměru $1 : 2$. Dokažte, že při obvyklém označení délek stran trojúhelníku ABC platí nerovnost

$$3|a - b| < c.$$

(*Jaroslav Švrček*)

4. Nalezněte všechny trojčleny $P(x) = ax^2 + bx + c$ s celočíselnými koeficienty a, b a c, pro které platí $P(1) < P(2) < P(3)$ a zároveň $\bigl(P(1)\bigr)^2 + \bigl(P(2)\bigr)^2 + \bigl(P(3)\bigr)^2 = 22$. (*Tomáš Jurík*)

5. V daném trojúhelníku ABC zvolme uvnitř strany AC body K, M a uvnitř strany BC body L, N tak, že

$$|AK| = |KM| = |MC|, \quad |BL| = |LN| = |NC|.$$

Dále označme E průsečík úhlopříček lichoběžníku $ABLK$, F průsečík úhlopříček lichoběžníku $KLNM$ a G průsečík úhlopříček lichoběžníku $ABNM$. Dokažte, že body E, F a G leží na těžnici z vrcholu C trojúhelníku ABC, a určete poměr $|GF| : |EF|$. (*Šárka Gergelitsová*)

6. a) Maruška rozmístí do vrcholů pravidelného osmiúhelníku různé počty od jednoho do osmi bonbonů. Petr si pak může vybrat, které tři hromádky bonbonů dá Marušce, ostatní si ponechá. Jedinou podmínkou je, že tyto tři hromádky leží ve vrcholech rovnoramenného trojúhelníku. Maruška chce rozmístit bonbony tak, aby jich dostala co nejvíce, ať už Petr trojici vrcholů vybere jakkoli. Kolik jich tak Maruška zaručeně získá?

b) Stejnou úlohu řešte i pro pravidelný devítiúhelník, do jehož vrcholů rozmístí Maruška 1 až 9 bonbonů. (Mezi rovnoramenné trojúhelníky řadíme i trojúhelníky rovnostranné.) (*Jaromír Šimša*)