MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA NA STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH

kategorie A, B, C a P

67. ROČNÍK, 2017/2018

`www.matematickaolympiada.cz`

Studenti středních škol,

zveme vás k účasti v matematické olympiádě, jejíž soutěžní kategorie A, B, C a P pořádáme právě pro vás.

Kategorie A je určena žákům maturitních a předmaturitních ročníků,
kategorie B žákům, kterým do maturity zbývá více než 2 roky,
kategorie C žákům, kterým do maturity zbývá více než 3 roky,
kategorie P je zaměřena na programování a je určena žákům všech ročníků.

Podrobnější rozdělení uvádí následující tabulka:

Předpokládaný školní rok ukončení studia maturitou	kategorie MO
2017/2018	A
2018/2019	A
2019/2020	B
2020/2021	C

Žáci nižších ročníků víceletých gymnázií soutěží v MO společně s žáky základních škol v kategoriích Z6 až Z9. Jim je věnován zvláštní leták.

Průběh soutěže v kategoriích A, B, C: V kategorii A probíhá soutěž ve třech kolech (školním, krajském a ústředním), v kategoriích B a C probíhá ve dvou kolech (školním a krajském).

Školní kolo má dvě části – domácí a klauzurní. V **domácí části** na vás čeká šest úloh, které najdete na adrese

`www.matematickaolympiada.cz/cs/olympiada-pro-stredni-skoly/67-rocnik-17-18`

Jejich řešení (ne nutně všech) odevzdejte svému učiteli matematiky do **4. prosince 2017** (kategorie A) a do **22. ledna 2018** (kategorie B, C). Ten je opraví, ohodnotí podle stupnice *1 – výborně, 2 – dobře, 3 – nevyhovuje.* Pak je s vámi rozebere, vysvětlí vám případné nedostatky a seznámí vás se správným řešením, které také najdete na našich internetových stránkách. Jestliže budou vaše řešení alespoň čtyř úloh ohodnocena jako výborná nebo dobrá, budete pozváni do **klauzurní části** školního kola. Tam budete ve stanoveném čase samostatně řešit další tři úlohy.

Nejlepší účastníci školního kola budou pozváni do **krajského kola**. Tam budou během čtyř hodin samostatně řešit čtyři úlohy. Podle rozhodnutí Ústřední komise MO nejsou v klauzurních kolech MO povoleny kalkulačky, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky. O pořadí v krajských kolech soutěže rozhoduje součet bodů získaných za jednotlivé úlohy, a to 0 až 6 bodů za každou z nich. Bodové hranice k určení úspěšných řešitelů budou stanoveny centrálně po vyhodnocení statistik bodových výsledků ze všech krajů. Podrobnější pravidla pro vyhodnocování krajských kol najdete na `www.matematickaolympiada.cz`.

V kategorii A budou ještě nejlepší řešitelé krajského kola z celé republiky soutěžit v **ústředním kole**, a to za podmínek podobných jako na **mezinárodní matematické olympiádě**, kde během soutěže lze používat pouze psací a rýsovací potřeby. Právě pro ni se z vítězů ústředního kola vybere družstvo České republiky.

Průběh soutěže v kategorii P: Ve **školním kole** řešíte do 15. 11. 2017 jen čtyři úlohy uvedené na adrese `http://mo.mff.cuni.cz/`. Řešení nebudete odevzdávat ve škole, ale odešlete ho přes webové rozhraní podle pokynů uvedených u úloh.

V kategorii P se nekoná klauzurní část školního kola, takže úspěšní řešitelé domácích úloh budou pozváni přímo do **krajského kola**. Stejně jako v kategorii A se i v kategorii P koná **ústřední kolo**, jehož vítězové se zúčastní každoroční **mezinárodní olympiády v informatice**.

Termíny soutěžních kol 67. ročníku MO jsou stanoveny takto:

	I. kolo (školní část)	II. kolo (krajské)	III. kolo (ústřední)
Kategorie A	12.12. 2017	16.1. 2018	18.3.–21.3. 2018
Kategorie B, C	30.1. 2018	10.4. 2018	—
Kategorie P	—	23.1. 2018	21.3.–24.3. 2018

MO pořádají *Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČR*, *Jednota českých matematiků a fyziků* a *Matematický ústav Akademie věd České republiky.* Soutěž organizuje *ústřední komise MO* a v krajích ji řídí *krajské komise MO* při pobočkách JČMF. Na jednotlivých školách ji zajišťují pověření učitelé matematiky, na které se můžete s otázkami kolem MO kdykoli obracet.

Řešení soutěžních úloh vypracujte čitelně na listy formátu A4. Každou úlohu začněte na novém listě a uveďte vlevo nahoře záhlaví podle vzoru:

Karel Smutný
2. D, gymnázium
Kulaté nám. 9, 629 79 Lužany
B–I–4

Poslední údaj je označení úlohy. Znění úloh nemusíte opisovat. Nevejde-li se vám řešení na jeden list, uveďte na dalších listech vlevo nahoře své jméno a označení úlohy a očíslujte stránky. **Řešení pište jako výklad, v kterém jsou uvedeny všechny podstatné úvahy tak, aby bylo možno sledovat váš myšlenkový postup.**

Na ukázku uvedeme řešení úlohy z I. kola kategorie C z jednoho z předcházejících ročníků MO:

Úloha C–I–5. *Dokažte, že nejmenší společný násobek $[a,b]$ a největší společný dělitel (a,b) libovolných dvou kladných celých čísel a, b splňují nerovnost*

$$a\cdot(a,b)+b\cdot[a,b]\geqq 2ab.$$

Zjistěte, kdy v této nerovnosti nastane rovnost.

Řešení. Nerovnost by bylo lehké dokázat, kdyby některý ze dvou sčítanců na levé straně byl sám aspoň roven pravé straně. Číslo $[a,b]$ je zjevně násobkem čísla a.

Jestliže $[a,b]\geqq 2a$, pak $b[a,b]\geqq 2ab$ a v dané nerovnosti platí dokonce ostrá nerovnost, neboť číslo $a(a,b)$ je kladné.

Jestliže $[a,b]<2a$, nezůstává jiná možnost než $[a,b]=a$. To však nastane, jen když $b\mid a$. V tomto případě $(a,b)=b$ a v dané nerovnosti nastane rovnost.