MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

pro žáky
základních škol a nižších ročníků víceletých gymnázií

62. ROČNÍK, 2012/2013

http://math.muni.cz/mo

Milí mladí přátelé,

máte rádi zajímavé matematické úlohy a chtěli byste si v jejich řešení zasoutěžit? Jestliže ano, zveme vás k účasti v matematické olympiádě (MO). Soutěž je dobrovolná a nesouvisí s klasifikací z matematiky. Mohou se jí zúčastnit žáci 5. až 9. ročníků základních škol a žáci jim odpovídajících ročníků víceletých gymnázií vždy ve svých kategoriích. Podrobnější rozdělení uvádí následující tabulka.

ročník			kategorie
ZŠ	8leté G	6leté G	
9	4	2	Z9
8	3	1	Z8
7	2	–	Z7
6	1	–	Z6
5	–	–	Z5

Se souhlasem svého učitele matematiky můžete soutěžit i v některé kategorii určené pro vyšší ročník nebo v některé kategorii A, B, C, P, které jsou určeny pro studenty středních škol. Soutěžní úlohy pro kategorie A, B, C, P jsou uveřejněny v letáku Matematická olympiáda na středních školách.

Průběh soutěže

Soutěž v jednotlivých kategoriích probíhá ve dvou nebo ve třech kolech.

Kategorie Z9 má školní, okresní a krajské kolo.
Kategorie Z8, Z7, Z6 a Z5 mají školní a okresní kolo.

Školní kolo: V tomto vstupním kole soutěže, organizovaném na školách, řeší žáci ve svém volném čase (doma) šest úloh uveřejněných v tomto letáku. Do soutěže budou zařazeni žáci, kteří odevzdají svým učitelům matematiky řešení alespoň čtyř úloh. Všem soutěžícím však doporučujeme, aby se snažili vyřešit všechny úlohy, protože v dalším průběhu soutěže mohou být zadány podobné úlohy.

Řešení úloh odevzdávejte svým učitelům matematiky v těchto termínech:

Kategorie Z5, Z9: první trojici úloh do **26. listopadu 2012** a druhou trojici úloh do **7. ledna 2013**.
Kategorie Z6 až Z8: první trojici úloh do **7. ledna 2013** a druhou trojici úloh do **18. března 2013**.

Vaši učitelé úlohy opraví a ohodnotí podle stupnice *1 – výborně, 2 – dobře, 3 – nevyhovuje*. Pak je s vámi rozeberou, vysvětlí vám případné nedostatky a seznámí vás se správným, popřípadě i jiným řešením. Úspěšnými řešiteli školního kola se stanou ti soutěžící, kteří budou mít alespoň u čtyř úloh řešení hodnocena výborně nebo dobře.

Práce všech úspěšných řešitelů kategorií Z6 až Z9 zašle vaše škola okresní komisi MO. Ta z nich vybere nejlepší řešitele a pozve je k účasti v okresním kole soutěže. Výběr účastníků v kategorii Z5 provádějí po dohodě s okresní komisí MO školy, které okresní kolo pořádají (viz níže).

Okresní kolo se uskuteční
pro kategorii Z9 **23. ledna 2013**,
pro kategorii Z6 až Z8 **17. dubna 2013**,
pro kategorii Z5 **23. ledna 2013**.

Okresní kolo pro kategorie Z6 až Z9 se pořádá zpravidla v okresním městě, v kategorii Z5 okresní kolo probíhá na několika školách okresu pověřených pořádáním.

Žáci pozvaní do okresního kola kategorie Z9 budou řešit samostatně v průběhu 4 hodin 4 soutěžní úlohy. Pozvaní žáci kategorií Z6 až Z8 budou samostatně řešit 3 úlohy v průběhu 2 hodin. Pozvaní žáci kategorie Z5 budou samostatně řešit 3 úlohy v průběhu 90 minut.

Ve všech kategoriích se řešení úloh obodují a podle součtu získaných bodů se sestaví pořadí účastníků okresního kola. Účastníci, kteří získají předepsaný počet bodů (zpravidla aspoň polovinu z dosažitelných bodů), se stanou úspěšnými řešiteli okresního kola a nejlepší z nich budou odměněni.

Krajské kolo pro kategorii Z9 se bude konat **21. března 2013** v některém městě vašeho kraje. Průběh soutěže a její vyhodnocení je stejné jako při okresním kole. Nejlepší účastníci krajského kola jsou vyhlášeni jeho vítězi.

Matematickou olympiádu pořádají *Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy, Jednota českých matematiků a fyziků a Matematický ústav Akademie věd České republiky.* Soutěž organizuje *ústřední komise MO*, v krajích ji řídí *krajské komise MO* při pobočkách JČMF a v okresech *okresní komise MO*. Na jednotlivých školách ji zajišťují pověření učitelé matematiky. Vy se obracejte na svého učitele matematiky.

Pokyny a rady soutěžícím

Řešení soutěžních úloh vypracujte čitelně na listy formátu A4. Každou úlohu začněte na novém listě a uveďte vlevo nahoře záhlaví podle vzoru:

Karel Veselý
8. B
ZŠ, Kulaté nám. 9, 629 79 Lužany
okres Znojmo
2012/2013
Úloha Z8–I–3

Řešení pište tak, aby bylo možno sledovat váš myšlenkový postup, podrobně vysvětlete, jak jste uvažovali. Uvědomte si, že se hodnotí nejen výsledek, ke kterému jste došli, ale hlavně správnost úvah, které k němu vedly.

Práce, které nebudou splňovat tyto podmínky nebo nebudou odevzdány ve stanoveném termínu, nebudou do soutěže přijaty.

Na ukázku uvedeme řešení úlohy z II. kola kategorie Z8 z jednoho z předcházejících ročníků MO:

Úloha Z8–II-1. *Je dán obdélník s celočíselnými délkami stran. Jestliže zvětšíme jednu jeho stranu o 4 a druhou zmenšíme o 5, dostaneme obdélník s dvojnásobným obsahem. Určete strany daného obdélníku. Najděte všechny možnosti.*

Řešení. Délky stran obdélníku označíme a, b. Nový obdélník má délky stran $a+4$, $b-5$. Podle podmínky úlohy pro obsahy obou obdélníků platí

$$2ab = (a+4)(b-5).$$

Postupně upravíme:

$$\begin{aligned} ab - 4b + 5a &= -20 \\ ab - 4b + 5a - 20 &= -40 \\ (a-4)(b+5) &= -40 \end{aligned}$$

(Odečteme 20, abychom levou stranu mohli rozložit na součin.)

Řešení najdeme rozkladem čísla -40 na 2 činitele. Přitom musí být $a > 0$, $b > 0$, a tedy $a - 4 > -4$, $b + 5 > 5$. Jsou dvě možnosti:

$$(-2) \cdot 20 = -40 \qquad \text{a} \qquad (-1) \cdot 40 = -40.$$

V prvním případě dostaneme obdélník o stranách $a = 2$, $b = 15$ s obsahem $S = 30$. Nový obdélník pak má strany $a' = 6$, $b' = 10$ a obsah $S' = 60$, tj. $S' = 2S$.

V druhém případě dostaneme obdélník o stranách $a = 3$, $b = 35$ s obsahem $S = 105$. Nový obdélník pak má strany $a' = 7$, $b' = 30$ a obsah $S' = 210$. Opět je $S' = 2S$.

KATEGORIE Z5

Z5–I–1

Maminka zaplatila v knihkupectví 2 700 Kč. Platila dvěma druhy bankovek, dvousetkorunovými a pětisetkorunovými, a přesně. Kolik kterých bankovek mohla použít? Uveďte všechny možnosti. (*M. Krejčová*)

Z5–I–2

Pat napsal na tabuli podivný příklad:

$$550 + 460 + 359 + 340 = 2\,012.$$

Mat to chtěl napravit, proto pátral po neznámém čísle, které by připočetl ke každému z pěti uvedených čísel, aby pak byl příklad početně správný. Jaké to bylo číslo? (*L. Hozová*)

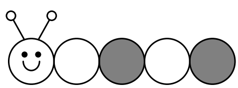
Z5–I–3

Ruda dostal k narozeninám budík. Měl z něj radost a seřídil si jej podle přesného času. Od té doby každé ráno, když vstával (sobotu, neděli a prázdniny nevyjímaje), zmáčkl přesně na 4 sekundy tlačítko, kterým se osvětluje ciferník. Přitom si všiml, že po dobu stisknutí tlačítka je čas na budíku zastaven. Jinak se ale budík vůbec nezpožďuje ani nezrychluje. Odpoledne 11. prosince se Ruda podíval na svůj budík a zjistil, že ukazuje přesně o 3 minuty méně, než by měl.

Kdy dostal Ruda tento budík? (*M. Petrová*)

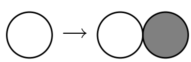
Z5–I–4

Červík se skládá z bílé hlavy a několika článků, viz obrázek.

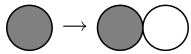


Když se červík narodí, má hlavu a jeden bílý článek. Každý den přibude červíkovi nový článek jedním z následujících způsobů:

- buď se některý bílý článek rozdělí na bílý a šedý:



- nebo se některý šedý článek rozdělí na šedý a bílý:



(V obou případech popisujeme situaci při pohledu na červíka od hlavy.) Čtvrtého dne červík dospívá a dále neroste — jeho tělo se skládá z hlavy a čtyř článků.

Kolik nejvíce různých barevných variant dospělých červíků tohoto druhu může existovat? (*E. Novotná*)

Z5–I–5

Vypočtěte $3 \cdot 15 + 20 : 4 + 1$.

Pak doplňte závorky do zadání tak, aby výsledek byl:

1. co největší celé číslo,
2. co nejmenší celé číslo.

(*M. Volfová*)

Z5–I–6

Sedm trpaslíků se postavilo po obvodu své zahrádky, do každého rohu jeden, a napnuli mezi sebou provaz kolem celé zahrady. Sněhurka vyšla od Šmudly a chodila podél provazu. Nejprve šla čtyři metry na východ, kde potkala Prófu. Od něj pokračovala dva metry na sever, než dorazila k Rejpalovi. Od Rejpala šla na západ a po dvou metrech natrefila na Stydlína. Dál pokračovala tři metry na sever, až došla ke Štístkovi. Vydala se na západ a po čtyřech metrech potkala Kejchala, odkud jí zbývaly tři metry na jih ke Dřímalovi. Nakonec podle provázku došla nejkratší cestou ke Šmudlovi a tím obešla celou zahradu.

Kolik metrů čtverečních má celá zahrada? (*M. Mach*)

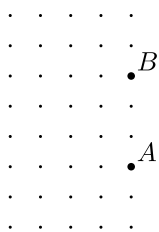
KATEGORIE Z6

Z6–I–1

Libor si myslí trojmístné přirozené číslo, které má všechny své číslice liché. Pokud k němu přičte 421, dostane trojmístné číslo, které nemá ani jednu svou číslici lichou. Najděte všechna čísla, která si může Libor myslet. (*L. Šimůnek*)

Z6–I–2

Na obrázku jsou vyznačeny uzlové body čtverečkové sítě, z nichž dva jsou pojmenovány A a B. Bod C nechť je jeden ze zbylých uzlových bodů. Najděte všechny možné polohy bodu C tak, aby trojúhelník ABC měl obsah 4,5 čtverečku. (*E. Novotná*)



Z6–I–3

Obři Koloděj a Bobr mluví některé dny jenom pravdu a někdy jenom lžou. Koloděj mluví pravdu v pondělí, v pátek a v neděli, v ostatní dny lže. Bobr mluví pravdu ve středu, čtvrtek a pátek, ostatní dny lže.

1. Určete, kdy může Koloděj říci: „Včera jsem mluvil pravdu."
2. Jednoho dne oba řekli: „Včera jsem lhal." V který den to bylo?

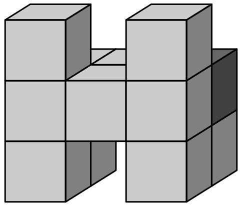
(*M. Volfová*)

Z6–I–4

Eva má tři papírky a na každém z nich je napsáno jedno přirozené číslo. Když vynásobí mezi sebou dvojice čísel z papírků, dostane výsledky 48, 192 a 36. Která čísla jsou napsána na Eviných papírcích? (*E. Novotná*)

Z6–I–5

Na obrázku je stavba složená z dvanácti shodných krychlí. Na kolik různých míst můžeme přemístit tmavou kostku, chceme-li, aby se povrch sestaveného tělesa nezměnil?



Stejně jako u původní stavby se i u stavby nové musejí kostky dotýkat celými stěnami. Polohu světlých kostek měnit nelze. (*D. Reichmann*)

Z6–I–6

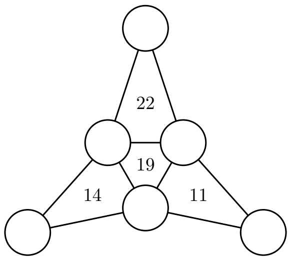
Číšník v restauraci U Šejdíře vždy započítává platícímu hostovi do účtu i datum: celkovou utracenou částku zvětší o tolik korun, kolikátý den v měsíci zrovna je.

V září se v restauraci dvakrát sešla trojice přátel. Poprvé platil každý z nich zvlášť, číšník tedy vždy přičetl datum a žádal od každého 168 Kč. Za čtyři dny tam obědvali znovu a dali si přesně totéž co minule. Tentokrát však jeden platil za všechny dohromady. Číšník tedy připsal datum do účtu jen jednou a řekl si o 486 Kč. Přátelům se nezdálo, že ač se ceny v jídelním lístku nezměnily, mají oběd levnější než minule, a číšníkův podvod ten den odhalili. Kolikátého zrovna bylo? (*L. Šimůnek*)

KATEGORIE Z7

Z7–I–1

Na obrázku je šest kroužků, které tvoří vrcholy čtyř trojúhelníků. Napište do kroužků navzájem různá jednomístná přirozená čísla tak, aby v každém trojúhelníku platilo, že číslo uvnitř je součtem čísel napsaných v jeho vrcholech. Najděte všechna řešení. (*E. Novotná*)



Z7–I–2

Před naší školou je květinový záhon. Jednu pětinu všech květin tvoří tulipány, dvě devítiny narcisy, čtyři patnáctiny hyacinty a zbytek jsou macešky. Kolik květin je celkem na záhonu, jestliže od žádného druhu jich není více než 60 ani méně než 30? (*M. Petrová*)

Z7–I–3

Obři Bobr a Koloděj mluví některé dny jenom pravdu a některé dny jenom lžou. Bobr mluví pravdu pouze o víkendech, Koloděj mluví pravdu v pondělí, v pátek a v neděli, v ostatní dny lže.

Jednoho dne Bobr řekl: „Včera jsme oba lhali.“

Koloděj však nesouhlasil: „Aspoň jeden z nás mluvil včera pravdu.“

Který den v týdnu můžou obři vést takový rozhovor?

(*M. Volfová a V. Žádník*)

Z7–I–4

Paní učitelka napsala na tabuli následující čísla:

$$1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16,\ 19,\ 22,\ 25,\ 28,\ 31,\ 34,\ 37,\ 40,\ 43.$$

Dvě sousední čísla se liší vždy o stejnou hodnotu, v tomto případě o 3. Pak z tabule smazala všechna čísla kromě 1, 19 a 43. Dále mezi tato tři čísla dopsala několik celých čísel tak, že se každá dvě sousední čísla opět lišila o stejnou hodnotu a přitom žádné číslo nebylo napsáno dvakrát.

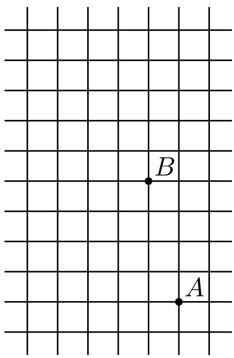
Kolika způsoby mohla paní učitelka čísla doplnit? (*K. Pazourek*)

Z7–I–5

Ve sportovním areálu je upravená plocha tvaru obdélníku $ABCD$ s delší stranou AB. Úhlopříčky AC a BD svírají úhel $60°$. Běžci trénují na velkém okruhu $ACBDA$ nebo na malé dráze ADA. Mojmír běžel desetkrát po velkém okruhu a Vojta patnáctkrát po malé dráze, tedy patnáctkrát v jednom směru a patnáctkrát v opačném. Oba dohromady uběhli 4,5 km. Jak dlouhá je úhlopříčka AC? (*L. Hozová*)

Z7–I–6

Máme čtverečkovou síť se 77 uzlovými body. Dva z nich jsou označeny A a B jako na obrázku. Bod C nechť je jeden ze zbylých uzlových bodů. Najděte všechny možné polohy bodu C tak, aby trojúhelník ABC měl obsah 6 čtverečků. (*E. Novotná*)

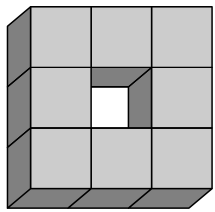


KATEGORIE Z8

Z8–I–1

Součin tří přirozených čísel je 600. Kdybychom jednoho činitele zmenšili o 10, zmenšil by se součin o 400. Kdybychom místo toho jednoho činitele zvětšili o 5, zvětšil by se součin na dvojnásobek původní hodnoty. Která tři přirozená čísla mají tuto vlastnost? (*L. Hozová*)

Z8–I–2



Standa si složil 7 shodných útvarů, každý slepený z 8 stejných šedých krychliček o hraně 1 cm tak jako na obrázku.

Potom všechny ponořil do bílé barvy a následně každý z útvarů rozebral na původních 8 dílů, které tak měly některé stěny šedé a jiné bílé. Přidal k nim ještě 8 nových krychliček, jež byly stejné jako ostatní, akorát celé bílé. Ze všech kostek dohromady poskládal jednu velkou krychli a snažil se přitom, aby co největší část povrchu vzniklé krychle byla šedá. Kolik cm^2 povrchu bude jistě bílých?

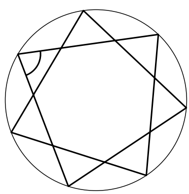
(*M. Mach*)

Z8–I–3

Děda zapomněl čtyřmístný kód svého mobilu. Věděl jen, že na prvním místě nebyla nula, že uprostřed byly buď dvě čtyřky nebo dvě sedmičky nebo taky čtyřka se sedmičkou (v neznámém pořadí) a že šlo o číslo dělitelné číslem 15. Kolik je možností pro zapomenutý kód? Jaká číslice mohla být na prvním místě? (*M. Volfová*)

Z8–I–4

Je dána pravidelná sedmicípá hvězda podle obrázku. Jaká je velikost vyznačeného úhlu? (*E. Patáková*)



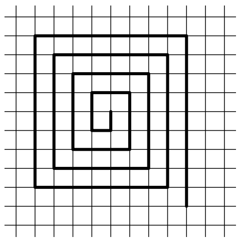
Z8–I–5

1. září 2007 byla založena jazyková škola, ve které vyučovalo sedm pedagogů. 1. září 2010 k těmto sedmi učitelům přibyl nový kolega, kterému bylo právě 25 let. Do 1. září 2012 jeden z učitelů ze školy odešel, a tak jich zůstalo opět sedm. Průměrný věk pedagogů na škole byl ve všechna tři zmíněná data stejný.

Kolik let bylo 1. září 2012 učiteli, který ve škole už nepracoval? Jaký byl ten den průměrný věk učitelů na škole? (*L. Šimůnek*)

Z8–I–6

Anička a Hanka chodily v labyrintu po spirálovité cestičce, jejíž začátek je schematicky znázorněn na obrázku. Strana čtverečku ve čtvercové síti má délku 1 m a celá cestička od středu bludiště až k východu je dlouhá 210 m.



Děvčata vyšla ze středu bludiště, nikde se nevracela a po čase každá zastavila v některém z rohů. Anička přitom ušla o 24 m více než Hanka. Ve kterých rozích mohla děvčata stát? Určete všechna řešení. (*E. Novotná*)

KATEGORIE Z9

Z9–I–1

Na tabuli bylo napsáno trojmístné přirozené číslo. Připsali jsme k němu všechna další trojmístná čísla, která lze získat změnou pořadí jeho číslic. Na tabuli pak byla kromě čísla původního tři nová. Součet nejmenších dvou ze všech čtyř čísel je 1 088. Jaké číslice obsahuje původní číslo?

(*L. Hozová*)

Z9–I–2

Trojúhelník má dvě strany, jejichž délky se liší o 12 cm, a dvě strany, jejichž délky se liší o 15 cm. Obvod tohoto trojúhelníku je 75 cm. Určete délky jeho stran. Najděte všechny možnosti. (*L. Šimůnek*)

Z9–I–3

U horské chaty nám trenér řekl: „Půjdeme-li dál tímto pohodlným tempem 4 km za hodinu, přijdeme na nádraží 45 minut po odjezdu našeho vlaku."

Pak ukázal na skupinu, která nás právě míjela: „Ti využívají holí, a tak dosahují průměrné rychlosti 6 km za hodinu. Na nádraží budou již půl hodiny před odjezdem našeho vlaku."

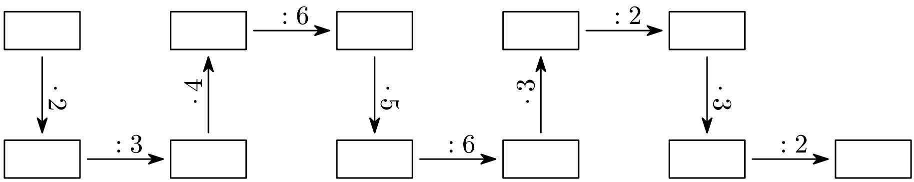
Jak bylo nádraží daleko od horské chaty? (*M. Volfová*)

Z9–I–4

Pravidelný osmiúhelník $ABCDEFGH$ je vepsán kružnici o poloměru 5 cm. Sestrojte trojúhelník ABX tak, aby bod D byl ortocentrem (průsečíkem výšek) trojúhelníku ABX. (*M. Mach*)

Z9–I–5

Do každého pole níže zobrazeného schématu máme zapsat čtyřmístné přirozené číslo tak, aby všechny naznačené početní operace byly správné. Kolika různými způsoby lze schéma vyplnit? (*L. Šimůnek*)



Z9–I–6

Je dán pravoúhlý lichoběžník $ABCD$ s pravým úhlem u vrcholu B a s rovnoběžnými stranami AB a CD. Úhlopříčky lichoběžníku jsou na sebe kolmé a mají délky $|AC| = 12\,\mathrm{cm}$, $|BD| = 9\,\mathrm{cm}$. Vypočítejte obvod a obsah tohoto lichoběžníku. (*M. Krejčová*)